

Числа Каталана

Определение 1. Обозначим через C_n число неассоциативных произведений $n+1$ буквы. Число C_0 полагается равным 1. Число C_n называется n -ым числом Каталана.

$$a(b(cd)) \quad (ab)(cd) \quad ((ab)c)d \quad a((bc)d) \quad (a(bc))d$$

1. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_nC_0 \quad (n \geq 0)$$

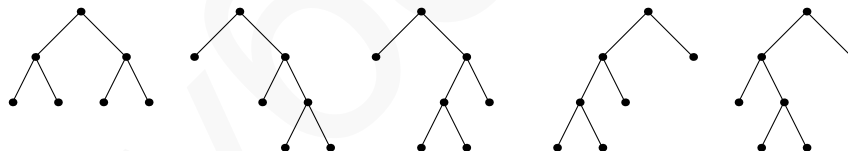
и начальным членом $C_0 = 1$.

Упражнение 1. Найдите первые 5 чисел Каталана.

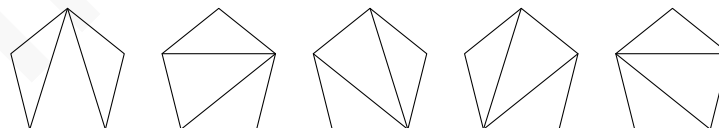
В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно C_n . Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию и проверить рекуррентное соотношение. В некоторых задачах полезно сделать и то и то.

Для однозначной трактовки условий задачи снабжены примером: списком исследуемых объектов для $n = 3$.

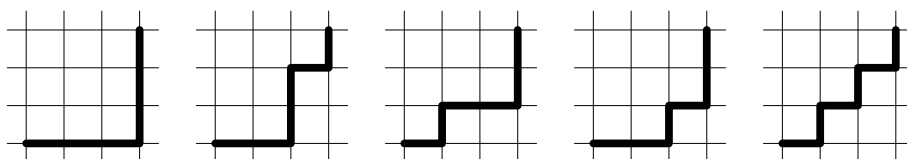
2. Докажите, что количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n + 1$ листом равно C_n .



3. Докажите, что количество *триангуляций* (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n + 2)$ -угольника равно C_n .



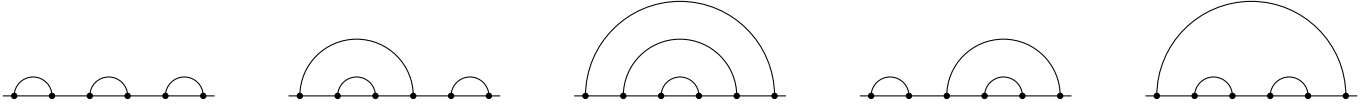
4. Докажите, что количество путей по линиям сетки из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , не поднимающихся выше диагонали $y = x$, равно C_n .



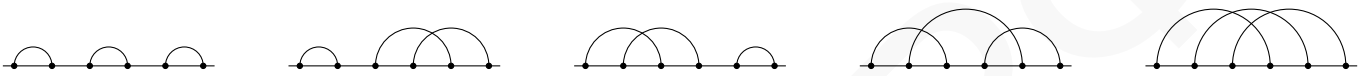
5. Докажите, что количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, что среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся, равно C_n .

$$((())) \quad (())() \quad ()(()) \quad (())() \quad ()()()$$

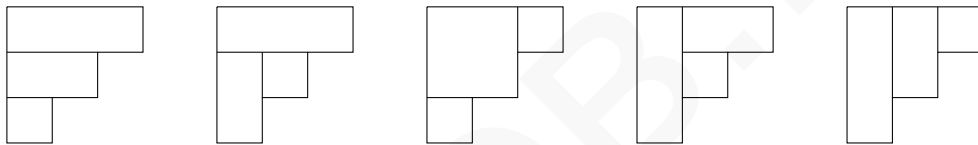
6. а) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами (каждая дуга лежит в верхней полуплоскости) равно C_n .



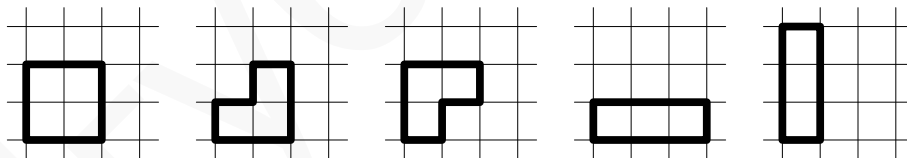
б) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой дугами, так что никакая дуга не лежит внутри другой (каждая дуга лежит в верхней полуплоскости), равно C_n .



7. Докажите, что количество способов разрезать “клетчатый равнобедренный прямоугольный треугольник” со стороной n на n прямоугольников равно C_n .



8. Докажите, что количество «параллеломино» (пара путей на клетчатой бумаге с началом $(0, 0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n + 2$ равно C_n .



9. а) Найдите количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку (a, b) , состоящих из a отрезков, проходящих по диагоналям клеток.

б) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$, состоящих из $2n$ отрезков.

в) Найдите, чему равно C_n .