

# Делимость, признаки делимости, НОД и НОК

группа «Поврче»

1.  $34a = 43b$ , докажите, что  $a + b$  составное
2. Решите в натуральных числах уравнение  $x^2 - y^2 = 33$ .
3. Докажите, что число имеет нечетное число делителей тогда и только тогда, когда оно — точный квадрат.
4. Посчитайте количество делителей
  - а) числа  $p^2 \cdot q^3$ , где  $p, q$  — простые числа;
  - б) \* числа  $16!$  (Подсказка: обратите внимание на следующую задачу)
5. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  — простое число. (обозначение:  $v_p(x)$  — степень, в которой  $p$  входит в  $x$ ; например,  $v_3(45) = 2$ , так как  $18 = 3^2 \cdot 5$ ):  
Докажите, что  $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^k} \right]$ ; ( $[x]$  — целая часть от  $x$ , например,  $[3.123] = 3$ )
6. \* (сложная) Примитивные пифагоровы тройки. Найдите все натуральные решения уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$  с условием, что  $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ . Утверждения-подсказки:
  - а) Числа  $x, y, z$  попарно взаимно просты.
  - б) Числа  $x, y$  разной чётности,  $z$  нечётно (подсказка: подумайте об остатках от деления на 4).
  - в) Пусть  $x$  чётно, решите задачу 5(а) для чисел  $y, z$ .
  - г) Все решения с чётным  $x$  получаются по формулам:  $x = 2ab$ ,  $y = a^2 - b^2$ ,  $z = a^2 + b^2$ , где  $a, b$  — взаимно простые натуральные числа разной чётности,  $a > b$ .

**НОД**, наибольший общий делитель (двух) чисел — это наибольший среди делителей этих (двух) чисел.

**НОК**, наименьшее общее кратное (двух) чисел — это наименьшее такое число, которое делится на эти (два) числа.

*Важная лемма.* Пусть  $c \mid ab$ , причём  $\text{НОД}(a, c) = 1$ . Тогда  $c \mid b$ .

1. *Важное следствие.* Докажите, что:

- а) Пусть  $p$  — простое число и  $p \mid ab$ . Тогда хотя бы одно из чисел  $a, b$  делится на  $p$ .

- б) Пусть  $X$  делится на числа  $n$  и  $m$ , причем  $n$  и  $m$  взаимно просты. Тогда  $X$  делится на  $n \cdot m$
2. Докажите, что
- а)  $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$
- б) Приведите пример, когда равенство  $\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c) = abc$  не выполнено. Каким неравенством всегда будут связаны числа  $\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c)$  и  $abc$ ?
3.  $a$  и  $b$  – натуральные числа. Известно, что  $a^2 + b^2$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a = b$ .
4. Пусть  $a, b, c$  – нечётные целые числа. Докажите равенство
- а)  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$
- б)  $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ .

### Признаки делимости:

- на 2 или 5: последняя цифра делится на 2 или 5 соответственно
  - на 3 или 9: сумма цифр делится на 3 или 9 соответственно
1. а) Докажите признаки делимости выше.
- б) Вдохновившись доказательством признака делимости на 2, сформулируйте и докажите признак делимости на  $2^n$  для произвольного натурального  $n$ .
- в) Вдохновившись доказательством признака делимости на 9, сформулируйте и докажите признак делимости на 11.
2. Известно, что натуральное число  $n$  в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что  $n$  делится на 27.
3. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось  $AB \times BG = DDDE$ . Докажите, что он где-то ошибся.
4. Может ли число  $n!$  оканчиваться ровно на 5 нулей?
5. Доказать, что число  $n^5 - 5n^3 + 4n$  делится на 120 при любом натуральном  $n$ .
6. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?
7. а) Дано шестизначное число  $abcdef$ , причём  $abc + def$  делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37. (Подсказка: подумайте о числе 999)
- б) \* Сформулируйте и докажите признак делимости на 37.