«Пытаясь сбежать в ~~вымышленные миры~~ более широкие числовые поля, подумай, а не будут ли … там все многочлены натуральной степени иметь корни?»

Комплексные числа (beginner's guide)

группа «Поврче»

Комплексные числа — числа вида $a + bi$, где a, b — вещественные числа, i — мнимая единица, то есть число, для которого выполняется равенство: $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обычно обозначается символом $\mathbb{C}$.

У числа $a + bi$ есть:

1. *вещественная* часть, это a (обозначается как $Re(a + bi) = a$);
2. *мнимая* часть, это b (обозн. $Im(a + bi) = b$);
3. *модуль* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
4. *сопряженное* к нему число $a - bi$ (обозн. $\overline{a + bi} = a - bi$).
5. комплексное число $a + bi$ можно представить как вектор v с координатами (a, b) на плоскости Oxy. Тогда числу $a + bi$ можно сопоставить пару чисел (r, φ), где r — модуль $a + bi$, а φ — *аргумент*, угол между v и осью Ox. *Тригонометрической формой* числа $a + bi$ является представление $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

* Примем пока просто за обозначение *формулу Эйлера*: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Задачи

1. Вычислите: (a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$;   (b) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

   (c) $i^{179-1329+2-18+57-2007}, i^{6\cdot 6\cdot 6}, i^n$;   (d) $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$;   (e) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

2. а) Найти вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению: (a) $(2+i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$;   (b) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$.

   б) Решить уравнения: (a) $z^2 = 3 - 4i$;   (б) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$.

   в) Решить уравнения: (a) $|z| + z = 8 + 4i$;   (b) $|z| - z = 8 + 12i$.

3. Найти тригонометрическую форму числа:

   (a) $1 - \sqrt{3}i$ (b) $\cos\alpha + i\sin\alpha$ (c) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$

   (d) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ (e) $\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}$

4. Доказать формулу Муавра (для целых $n \neq 0$):

$$(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

5. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

   (a) $(1 + i)^n$ (b) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2})^n$.   (c) $(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha})^n$ (d) $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

«...а ему [учёному] не нудно,
что растет человек глуп и покорен;
ведь зато он может ежесекундно
извлекать квадратный корень».

Корней из единицы больше, чем кажется

группа «Поврче»

Определение: Корень n-той степени ($n \in \mathbb{N}$) из a — это такое число, которое в степени n равно a. (Пример: $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — корень 6й степени из 1)

Обозначение: $\mathbf{U}_n$ — мн-во всех корней n-той степени из 1.

Примечание: в этой теме удобно использовать *тригонометрическую форму* чисел. Да и вообще, эти задачи про геометрию.

1. Доказать, что:
   а) если комплексное число z является одним из корней степени n из вещественного числа a, то и сопряженное число $\overline{z}$ является одним из корней степени n из a.
   б) если $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\overline{z}} = \{\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n}\}$.
2. Вычислите: (a) $\sqrt[6]{i}$; (b) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$; (c) $\sqrt[n]{1}$; (d) $\sqrt[n]{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}$.
3. Решить уравнения (подсказка: если два числа равны, то их модули тоже равны):
   (a) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$; (b) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$; (c) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.
4. ... Вообразите тригонометрический круг...
   а) Найти сумму всех корней степени n из единицы
   б) Найти произведение всех корней степени n из единицы.
   в) Пусть $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(0 \le k < n)$. Доказать, что $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$;
   г) Доказать, что $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$;
   д) Доказать, что $\varepsilon_k\varepsilon_l = \varepsilon_m$, где $m \equiv k + l \pmod n$
5. (флешбеки из ТЧ) Доказать, что:
   а) если числа r и s взаимно просты и $\alpha^r = \alpha^s = 1$, то $\alpha = 1$;
   б) если $d =$ НОД$(r,\, s)$, то $\mathbf{U}_r \cap \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_d$;
   в) если числа r и s взаимно просты, то всякий корень из единицы степени rs однозначно представляется в виде произведения корня степени r на корень степени s.

«Надо иметь большое очарование в сердце, чтобы ~~так трудиться~~ заботать весь этот листок.»

Компflexxxные числа (advanced guide)

группа «Поврче»

1. Доказать равенства (подсказка: используйте формулу Муавра):
   (a) $\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}\cos^{n-2k}x\sin^{2k}x$
   (b) $\sin nx = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}\cos^{n-2k-1}x\sin^{2k+1}x$
2. Вычислить суммы (подсказка: возведите что-нибудь в степень n и раскройте по биному):
   (c) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots$ (d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots$
   (c) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$ (d) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$
   (e) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$ (f) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots$
3. Доказать, что (подсказка: поделите отрезок $[0; 2\pi]$ на 3 части):
   (a) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})$ (b) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{4})$
   (c) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{4})$
4. Докажите, что :
   а) (подсказка: рассмотрите сумму $z + z^2 + \ldots + z^n = z\frac{z^n-1}{z-1}$, где $z = \cos x + i\sin x$.)
   $$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$
   $$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$
   б) (подсказка: используйте формулу для косинуса суммы)
   $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{n} = 0$
5. Решите уравнение (подсказка: $z = \cos\alpha + i\sin\alpha, t = \cos\beta + i\sin\beta$, рассмотрите $zt^k + z^{-1}t^{-k}$):
   $C_n^0\cos\alpha + C_n^1\cos(\alpha+\beta)x + C_n^2\cos(\alpha+2\beta)x^2 + \ldots + C_n^n\cos(\alpha+n\beta)x^n = 0$
6. Найдите суммы:
   а) $C_n^0\cos x + C_n^1\cos 2x + \ldots + C_n^n\cos nx$
   б) $\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2(2n-1)x$
   в) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$

Зачем я жил? Для какой цели я родился? А верно она существовала и верно было мне назначение высокое, потому что я чувствую в душе моей силы необъятные…

Продолжение; *сос мыслом

группа «Поврче»

1. (a) Пусть z — корень n-й степени из 1. Вычислить $1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}$;

   (b) Пусть z — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить $1 + z + z^2 + \ldots + z^n$;

   (c) Пусть z — корень из 1 и $z^n \pm z^m \pm 1 = 0$. Найти n и m.

2. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

   а) ε является первообразным корнем из единицы степени n;

   б) $\overline{\varepsilon}$ является первообразным корнем из единицы степени n;

   в) порядок ε в группе $\mathbf{U}_n$ равен n;

   г) ε является порождающим элементом группы $\mathbf{U}_n$.

3. Доказать, что, если числа r и s взаимно просты, то ε является первообразным корнем степени rs из единицы тогда и только тогда, когда ε является произведением первообразного корня степени r и первообразного корня степени s.

4. Доказать, что если z — первообразный корень нечетной степени n из единицы, то $-z$ — первообразный корень степени $2n$.

Примечание: Глубокий *геометрический смысол* переполняет...

1. Докажите и объясните геометрический смысл:

   (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; (b) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

2. Докажите, что угол Z_1 треугольника $Z_1Z_2Z_3$ равен аргументу простого отношения $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$, а отношение боковых сторон — модулю этого простого отношения.

   примечание: решите сначала для случая когда Z_1 лежит в начале координат.

3. а) Отображение умножения на a и прибавления b, $z \to az + b$, является поворотной гомотетией (как найти её центр?).

   б) Задайте в комплексных координатах параллельный перенос. Задайте симметрию относительно оси проходящей через начало координат.

4. *. Докажите, что четыре точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* вещественно:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R}$$