Простые числа

группа «Кайсия»

Определение. Число $p > 1$ называется *простым*, если кроме 1 и p оно не имеет других натуральных делителей. Число называется *составным*, если у него есть делитель больше 1, но меньше самого числа.

1. Площадь клетчатого прямоугольника равна 31 клетке. Чему равен его периметр?

2. а) Приведите пример трёх чисел, не делящихся друг на друга и таких, что произведение любых двух из них делится на третье.

   б) Тот же вопрос для чисел, больших ста.

3. Докажите, что простое число, большее, чем 3, представимо в виде $6n + 1$ или в виде $6n + 5$, где n — натуральное число или 0.

4. Найдите все простые числа, которые отличаются на 17.

5. Верно ли, что многочлен $P(n) = n^2+n+41$ при всех n принимает только простые значения?

6. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

7. а) Пусть m и n — натуральные числа, а $m^2 - n^2$ — простое число. Найдите $m - n$.

   б) В клетчатом квадрате закрасили меньший квадрат. Незакрашенных клеток осталось 79. Могут ли все углы большого квадрата остаться незакрашенными?

Основная теорема арифметики

группа «Кайсия»

Существование.

Каждое натуральное число, большее единицы, может быть разложено на простые множители.

Единственность.

Любые два разложения одного и того же числа могут отличаться только порядком множителей.

1. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел на её концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

2. Докажите, что в каноническом разложении куба все показатели степени кратны 3.

3. Найдите количество делителей числа:

   а) p^k (p простое); б) $q^m r^\ell$ (q и r — простые числа).

   Обобщите полученные результаты.

4. Пусть простой множитель p входит в каноническое разложение числа a в степени m, а в каноническое разложение b – в степени n, и пусть $m \le n$. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $[a, b]$ (наименьшее общее кратное) в степени m, а в каноническое разложение числа (a, b) – в степени n.

   Определение. Количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n, называется функцией Эйлера $\varphi(n)$.

5. Пусть p — простое число. Найдите...

   а) ... $\varphi(p)$; б) ... $\varphi(p^2)$; в) ... $\varphi(p^k)$.

6. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно...

   а) ... 1990? б) ... 2000? в) ... 2010?

7. Даны две прямоугольные картонки размерами 49×51 и 99×101. Их разрезали на одинаковые прямоугольные, но не квадратные части с целыми сторонами. Определите размеры частей.

8. Существует ли такой набор из...

а) ... 2...

б) ... 10...

... натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?

9. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, на 3 – кубом, а при умножении на 5 – пятой степенью?

10. Может ли число, имеющее ровно 15 делителей, делиться...

    а) ... на 100?

    б) ... на 1000?

11. Ваш друг задумал несколько произвольных натуральных чисел, а вы хотите все их угадать, причем именно в том порядке, в каком он эти числа задумал. Вам разрешается попросить друга сделать произвольное вычисление, связанное с его числами, например, найти произведение или сумму некоторых из них, или же болеее сложную комбинацию и сообщить вам результат. Каждое такое вычисление назовем ходом. За какое наименьшее число ходов вы сможете наверняка определить задуманные числа?