

Делимость

группа «Кайсия»

Определение.

Говорят, что число a делится на число b , если найдется такое целое число q , что $a = b \cdot q$. Обозначение: $a : b$.

1. В верхней строке таблицы указано то, что **дано**. В левом столбце – то, что **спрашивается**. Заполните пустые клетки: если "да", то поставьте "+", если "нет", то "-", если данных не хватает, то знак "?". Обоснуйте свои ответы.

	$a : m$ и $b : m$	$a : m$ и $b \nmid m$	$a \nmid m$ и $b \nmid m$
$a + b : m?$			
$a - b : m?$			
$a \cdot b : m?$			

2. Определите, не выполняя действий, делится ли...

а) ... $18^2 - 7^2$ на 11; б) ... $45^3 + 55^3$ на 2500; в) ... $1^3 + 2^3 + \dots + 82^3$ на 83.

3. Петя считает, что если a^2 делится на $a - b$, то b^2 делится на $a - b$. Прав ли Петя?
4. Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечётное количество делителей. Верно ли обратное?
5. а) Верно ли, что если $a : m$ и $b : n$, то $ab : mn$?
б) Верно ли, что если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$?
6. В Тройном государстве имеют хождение только монеты по 9 и 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.
7. Докажите, что произведение любых...
- а) ... трёх последовательных натуральных чисел делится на 6;
б) ... пяти последовательных чисел делится на 30.
8. Докажите, что $n^3 - 4n$ делится на 48 при чётном n .
9. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй – 49, а в третьей – 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из чётного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

10. В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключенному. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте – закрывалась и т.д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает. На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры, и т.д. Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки в камерах. Сколько узников в итоге вышли на свободу и из каких камер?

НОД и НОК. Алгоритм Евклида

группа «Кайсия»

1. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник 8×12 клеток. На какие равные квадраты его можно разбить?
2. Какие квадраты можно составить из равных прямоугольников размером 4×6 клеток? (Длинные стороны всех прямоугольников параллельны.)

Наибольший общий делитель двух чисел a и b будем обозначать через (a, b) , а наименьшее общее кратное – через $[a, b]$.

$$(a, a) = [a, a] = a, \quad (ca, cb) = c(a, b), \quad [ca, cb] = c[a, b]$$

3. Найдите общие делители чисел n и $n + 1$.

Лемма. Пусть a и b – натуральные числа (где $b < a$), r – остаток от деления a на b . Тогда наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r , то есть $(a, b) = (b, r)$

4. Найдите $(846, 246)$.
5. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b верно равенство

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab.$$

6. Верно ли, что являются взаимно простыми...

а) ... два соседних нечётных числа?

б) ... нечётное число и половина чётного, следующего за ним?

7. Найдите с помощью алгоритма Евклида...

а) ... $(1960, 588)$;

б) ... $[1960, 588]$.

8. Докажите, что дробь $\frac{12n + 1}{30n + 1}$ несократима.

9. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Найдите какие-нибудь два числа a и b , чтобы при разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты шести разных размеров.

10. Числа Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ определяются равенствами

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \quad (\text{следующее число равно сумме двух предыдущих})$$

и $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 1$. Найдите $(\mathcal{F}_{100}, \mathcal{F}_{101})$.