Определения

Этот листок содержит все необходимые определения и теоремы для занятий по графам. Если какое-то слово в листке кажется вам незнакомым, его всегда можно найти здесь.

Во всех наших листках мы считаем, что в графах остутствуют петли (рёбра, соединяющие вершину с собой) и кратные рёбра (то есть любые две вершины соединяются не более чем одним ребром).

- **Определение 1.** *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами* графа, а соединяющие линии — *рёбрами.* (Каждое ребро соединяет ровно две вершины.)

- **Определение 2.** *Степенью* (или порядком) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.

- **Теорема 1. (Лемма о рукопожатиях)** Сумма степеней всех вершин графа равняется удвоенному количеству рёбер.

  Следствие. Количество нечётных вершин всегда чётно.

- **Определение 3.** *Путём* в графе от вершины A до вершины B назовём такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Если никакая вершина не встречается более одного раза, то такой путь называется *простым.*

- **Определение 4.** *Циклом* называется путь, у которого начало и конец совпадают. *Простой цикл* — цикл без повторяющихся вершин (за исключением совпадения начала и конца).

- **Определение 5.** Граф называется *полным*, если любая вершина соединяется ребром с любой другой.

- **Определение 6.** Граф называется *связным*, если для любой его вершины найдётся путь, связывающий её с любой другой вершиной графа.

- **Определение 7.** *Компонентой связности* называется наибольший связный подграф.

- **Определение 8.** Два графа называются *одинаковыми* (или, по-научному, *изоморфными*), если в них можно занумеровать вершины таким образом, что между вершинами k и m в первом графе есть ребро, если и только если оно есть между вершинами с этими же номерами в другом графе.

- **Определение 9.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы рёбра соединяли только пары вершин разного цвета.
- **Определение 10.** Связный граф без циклов называется *деревом.*
- **Теорема 2. (Лемма о висячей вершине)** В любом дереве найдётся вершина, из которой выходит ровно одно ребро.
- **Теорема 3.** В дереве количество вершин на одну больше количества рёбер.
- **Теорема 4.** Из любого связного графа можно сделать дерево, удалив часть рёбер. (Такое дерево называется *остовным*)
- **Теорема 5.** Из всех графов на данном наборе вершин наименьшее количество рёбер имеют деревья и только они.

Графы

группа «Бресква»

В этом занятии вам понадобятся определения 1-8 и лемма о рукопожатиях.

1. Переформулируйте задачу 1 из вступительной олимпиады в терминах графов.
2. В графе с
   а) восемью,
   б) десятью

   вершинами степень каждой вершины равна 2. Нарисуйте все такие графы. Не забывайте, что графы могут быть несвязными.
3. Каждый из 7 мальчиков имеет не менее трёх братьев в этой компании. Докажите, что все они братья.
4. Докажите, что в графе с более чем одной вершиной есть две вершины одинаковой степени.
5. В Сербии 2018 компьютеров и принтер. К главному компьютеру подсоединён только один провод, к принтеру – 37, а к каждому обычному компьютеру – по 20 проводов. Всегда ли удастся распечатать условия теста с главного компьютера?
6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
7. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
8. Можно ли все рёбра полного графа с 55 вершинами раскрасить в 54 цвета таким образом, чтобы все рёбра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

Деревья

группа «Бресква»

1. Существует ли дерево, в котором все вершины имеют одинаковую степень? Сколько вершин может быть в таком дереве? Найдите все варианты.
2. Докажите, что в дереве на $n > 1$ вершинах имеется...
   а) ... хотя бы одна висячая вершина;
   б) ... хотя бы две висячие вершины.
3. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.
4. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?
5. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
6. Может ли граф иметь несколько различных остовных деревьев? Сущетвует ли граф, два остовных дерева которого не имеют общих рёбер?
7. В стране из любого города можно проехать в любой другой, двигаясь по дорогам (возможно, через другие города). Докажите, что можно превратить один из городов в военную базу (закрыв проезд через него) так, что из любого из оставшихся городов по-прежнему можно будет проехать в любой другой.
8. N-угольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Построим граф, соответствующий этому разбиению: отметим внутри каждого треугольника точку (это будут вершины графа) и будем соединять две точки ребром ровно в том случае, когда соответствующие точкам треугольники имеют общую сторону. Докажите, что...
   а) ... построенный граф будет деревом,
   б) ... хотя бы у двух треугольников разбиения две стороны совпадают со сторонами N–угольника (при $N > 3$).

Двудольные графы

группа «Бресква»

1. На 8 марта каждый из 10 мальчиков подарил по цветку 8 одноклассницам. Известно, что каждая девочка получила по 5 цветков. Сколько всего девочек?
2. Нарисуйте двудольный граф, где чёрные и белые вершины – это соответственно чёрные и белые клетки доски 3×3, а ребра соответствуют ходу коня.
3. Докажите, что дерево является двудольным графом.
4. Докажите, что в двудольном графе суммы степеней вершин в каждой доле равны.
5. Правда ли, что, если в двудольном графе степени всех вершин равны, то в долях вершин поровну?
6. Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив чёрную вершину в середину каждого ребра. Сколько вершин каждого цвета и сколько рёбер будет у полученного графа, если у исходного было V вершин и E рёбер?
7. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, ..., n, n.
8. Какое наибольшее число рёбер может быть в двудольном графе с 80 вершинами?