

## Графы, часть 3: графы на двумерных поверхностях

Граф называется планарным, если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Гранью планарного графа называется часть плоскости, в том числе и внешняя, ограниченная ребрами. Подробнее, это значит, что любые две точки грани можно соединить непрерывной ломаной без пересечения ребер.

Введем обозначения. Пусть  $P$  – количество ребер,  $V$  – количество вершин,  $G$  – количество граней в графе.

1. Докажите, что для дерева выполняется  $V - P + G = 2$ .
2. Докажите, что в связном графе при добавлении ребра количество граней увеличивается на 1.
3. Докажите, что в связном планарном графе выполняется  $V - P + G = 2$ .
4. Докажите, что в планарном графе  $V - P + G = K + 1$ , где  $K$  – количество компонент связности.
5. Докажите, что в связном планарном графе, в котором  $V \geq 3$ , справедливо неравенство  $2P \geq 3G$ .  
Докажите следствие:  $P \leq 3V - 6$ .

Полный граф с  $n$  вершинами (обозначается  $K_n$ ) – это граф, каждая из  $n$  вершин которого соединена с каждой.

6. Докажите, что в  $K_n$  выполняется  $P = 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ .  
Пользуясь этим, докажите тождество  $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1) / 2$ .
7. В компании  $n$  сотрудников и каждый дружит ровно с  $m$  другими. При каких  $n$  и  $m$  это возможно?
8. В компании  $4n + 1$  человек. Возможно ли, что в этой компании у каждой пары друзей есть общий враг, а у каждой пары врагов – общий друг?
9. В компании  $n$  человек. Среди любых троих есть пара друзей и пара врагов. Докажите, что пар друзей в этой компании не менее  $n(n - 1) / 6$ .
10. Докажите, что граф на 15 вершин со степенями вершин не менее 7, связан.
11. Докажите, что на плоскости нельзя нарисовать полный граф с пятью вершинами и непересекающимися ребрами ( $K_5$  не планарный).
12. Нарисуйте  $K_5$  на поверхности тора так, чтобы его ребра не пересекались.

А для какого наибольшего  $n$  можно нарисовать  $K_n$  на поверхности тора с непересекающимися ребрами? Ответ на этот вопрос – уже совсем другая история...