

Теория чисел

Кусочек простых чисел

- 1) а) Пусть $p > 3$ - простое число. Докажите, что $(p^2 - 1) : 24$.
- б) Для каких простых p число $p^2 + 11$ имеет шесть делителей?
- 2) Пусть $n > 2$. Докажите, что между n и $n!$ есть по крайней мере одно простое число.
- 3) Докажите, что множество простых чисел вида $p = 4k + 3$ бесконечно.
- 4) Существуют ли идущие подряд 10 составных чисел? А 1000000000000?
- 5) При каких натуральных n число $n^4 + 4$ составное?
- 6) Найти простые числа p , при которых $p, p + 2, p + 4$ также являются простыми.
- 7) Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 снова простое число или 1.

Делимость

- 8) Может ли произведение 4 подряд идущих натуральных чисел заканчиваться на 114?
- 9) Может ли число, которое оканчивается на 11 быть точным квадратом? А число, которое оканчивается на 55?
- 10) а) Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?
- б) А может ли сумма 1000000000 различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?
- 11) Найдите все числа, меньшие 1000, у которых ровно 30 натуральных делителей (включая 1 и само число).
- 12) Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.
- 13) Найдите две последние цифры числа $2^{99} + 2^{999}$.

Остатки

- 14) Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n .
- 15) Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n .
- 16) Докажите, что число $(1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 16^{2015}) : 17$.
- 17.1) Известно, что сумма квадратов двух чисел делится на 7. Докажите, что тогда эта сумма делится на 49.
- 17.2) Известно, что сумма квадратов двух чисел делится на 3. Докажите, что тогда эта сумма делится на 9.
- 17) Используя две предыдущие задачи докажите, что если сумма квадратов двух чисел делится на 21, то эта сумма делится на 441.
- 18) Докажите, что $2100^{2100^{2100}} - 1$ делится на 2101. А верно ли, что $261^{261^{261}} - 1$ делится на 262?
- 19) Какой остаток от деления на три дают числа а) $3^9 + 4^9$? б) $4^9 + 5^9$? в) $4^{10} + 5^{10}$?
- 20) Даны целые числа a, b, c , такие что, $(a + b + c) : 6$. Докажите, что $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$.
- 21) Найдите все точные квадраты, составленные только из цифр 1, 5 или 9.
- 22) Найдите все пары таких простых p и q , что $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.