Делимость-2

1. Разложите на простые множители: а) 1734; б) 1860; в) 1023.

   Определение. Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от единицы.

2. Докажите:
   а) Если некоторое число делится на два взаимно простых числа n и m, то оно делится и на их произведение nm.
   б) Если $pA \vdots q$, где p и q взаимно просты, то и $A \vdots q$.

3. p — простое число. Сколько существует натуральных числ а) меньших p и взаимно простых с ним; б) меньших p^2 и взаимно простых с ним.

4. Каково наименьшее натуральное число n, такое что $n!$ делится на 990?

5. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

6. Решите в натуральных числах уравнение а) $x^2 - y^2 = 31$; б) $x^2 - y^2 = 303$.

   Определение. *Наибольший общий делитель* (для краткости НОД) чисел a и b — это самое большое число, на которое одновременно делятся a и b.

   Наименьшее общее кратное (НОК) чисел a и b — это наименьшее число, которое одновременно делится на a и на b.

7. а) Чему равен НОД(17640, 1056)? б) Чему равен НОК(32000, 1500000)?

8. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство

$$\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = ab$$

9. $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ – составное число.

10. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры – на одинаковые буквы, а разные – на разные. В итоге у него получилось АБ · ВГ = ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

ТУБОР.РФ