

Делимость-1

Определение. Число a делится на число b (обозначается $a:b$), если существует такое число c , что $a = bc$. При этом числа b и c называются делителями числа a .

Любое число делится на 1 и на само себя. Может оказаться, что других делителей у данного числа нет.

Определение. Число называется *простым*, если оно имеет ровно два делителя — единицу и само себя. Число называется *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Единица не считается ни простым, ни составным числом.

1. Найдите все делители числа: а) 108; б) 1001.
2. Докажите, что произведение трёх подряд идущих чисел делится на 6.
3. Незнайка заявил, что
 - а) если ни один из множителей, не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число;
 - б) если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число;
 - в) если сумма нескольких слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число.

Так ли это? Приведите опровергающие примеры.

4. Докажите, что если
 - а) $a:c$ и $b:c$, то $ab:c^2$
 - б) $a:b$ и $b:c$, то $a:c$
 - в) $a:c$ и $b:d$, то $ab:cd$
 - г) $a:b$ и n — натуральное число, то $a^n:b^n$д*) $(ab):c$ и $(a+b):c$, то $(a^2+b^2):c$ и $(a^3+b^3):c^2$
5. Докажите, что если четырехзначное число не делится ни на одно простое от 2 до 97, то оно простое.
6. Докажите, что если d — делитель числа a , то a/d — также делитель числа a .
7. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.
8. Докажите, что каждое составное число a имеет делитель p , больший 1, такой, что $p^2 \leq a$.
9. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то $(p^2 - 1):24$.
10. Докажите, что простых чисел бесконечно много.