

Белградские теоремы комбинаторной арифметики

Шарич В.З., Масленникова М.С., <http://MathSchool.ru>

1. **Число сочетаний.** Количество способов выбрать k объектов из n без учета их порядка равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

- (a) В классе учится 25 человек. Надо выбрать 3-х дежурных. Сколькими способами это можно сделать?
- (b) Сколькими способами из полной колоды карт (52 карты) можно выбрать 6 так, чтобы среди них были представители всех четырех мастей?
2. **Количество делителей.** Количество натуральных делителей натурального числа $n = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$ равно $\tau(n) = (\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \dots (\delta_k + 1)$.

- (a) Сколько различных делителей у числа 37400?
- (b) 100 детей оставили свои вещи в раздевалке и ушли. В раздевалку зашло привидение и открыло все шкафчики. После него пришло второе привидение и закрыло каждый второй шкафчик. Потом пришло третье привидение и изменило состояние каждого третьего шкафчика (открытые шкафчики закрыло, закрытые — открыло). После чего зашло четвертое и поменяло состояние каждого четвертого и т.д. За время отсутствия детей в раздевалке побывало 100 привидений. Какие шкафчики оказались открытыми, когда дети вернулись в раздевалку?
3. **Количество кратных.** Количество чисел в ряду $a, a+1, \dots, b-1, b$, кратных k , равно $\lfloor b/k \rfloor - \lfloor (a-1)/k \rfloor$.
- (a) Сколько чисел на отрезке $[27; 2016]$ делится на 11?
- (b) Докажите, что произведение чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} .

4. **Формула включения-исключения.** Для трех признаков α, β, γ количество объектов, обладающих хотя бы одним из этих признаков, равно

$$N = N_\alpha + N_\beta + N_\gamma - N_{\alpha\beta} - N_{\beta\gamma} - N_{\gamma\alpha} + N_{\alpha\beta\gamma}.$$

- (a) Найти количество натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5.
- (b) Гоша, Илья и Сережа решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. На сколько отличается количество трудных задач от количества легких?

Белградские теоремы комбинаторной арифметики

Шарич В.З., Масленникова М.С., <http://MathSchool.ru>

1. **Число сочетаний.** Количество способов выбрать k объектов из n без учета их порядка равно

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

- (a) В классе учится 25 человек. Надо выбрать 3-х дежурных. Сколькими способами это можно сделать?
- (b) Сколькими способами из полной колоды карт (52 карты) можно выбрать 6 так, чтобы среди них были представители всех четырех мастей?
2. **Количество делителей.** Количество натуральных делителей натурального числа $n = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$ равно $\tau(n) = (\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1) \dots (\delta_k + 1)$.

- (a) Сколько различных делителей у числа 37400?
- (b) 100 детей оставили свои вещи в раздевалке и ушли. В раздевалку зашло привидение и открыло все шкафчики. После него пришло второе привидение и закрыло каждый второй шкафчик. Потом пришло третье привидение и изменило состояние каждого третьего шкафчика (открытые шкафчики закрыло, закрытые — открыло). После чего зашло четвертое и поменяло состояние каждого четвертого и т.д. За время отсутствия детей в раздевалке побывало 100 привидений. Какие шкафчики оказались открытыми, когда дети вернулись в раздевалку?
3. **Количество кратных.** Количество чисел в ряду $a, a+1, \dots, b-1, b$, кратных k , равно $\lfloor b/k \rfloor - \lfloor (a-1)/k \rfloor$.

- (a) Сколько чисел на отрезке $[27; 2016]$ делится на 11?
- (b) Докажите, что произведение чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} .
4. **Формула включения-исключения.** Для трех признаков α, β, γ количество объектов, обладающих хотя бы одним из этих признаков, равно

$$N = N_\alpha + N_\beta + N_\gamma - N_{\alpha\beta} - N_{\beta\gamma} - N_{\gamma\alpha} + N_{\alpha\beta\gamma}.$$

- (a) Найти количество натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5.
- (b) Гоша, Илья и Сережа решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. На сколько отличается количество трудных задач от количества легких?