Углубляющий листок

Перечисления

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. На плоскости даны прямые a, b, c, на прямой a дано k точек, на прямой b — l точек, на прямой c — m точек. Никакие три точки с разных прямых a, b и c не коллиненарны. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

3. Сколько существует целых чисел от 1 до 10^{30}, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни пятой степенью?

Остатки

4. Целые числа a, b, c таковы, что $a^3+b^3+c^3 \vdots 7$. Докажите, что $abc \vdots 7$.

5. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

6. Существует ли такое n, что n^2+n+1 делится на 2015?

Графы

7. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого в классе не менее 12 друзей.

8. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть состоящую из одной части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

9. Докажите, что в любом дереве количество ребер на 1 меньше количества вершин.

Конкурсная задача

Задача №3. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Странствующий рыцарь выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, по очереди сворачивает то на самую левую, то на самую правую дорогу. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.

Углубляющий листок

Перечисления

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. На плоскости даны прямые a, b, c, на прямой a дано k точек, на прямой b — l точек, на прямой c — m точек. Никакие три точки с разных прямых a, b и c не коллиненарны. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

3. Сколько существует целых чисел от 1 до 10^{30}, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни пятой степенью?

Остатки

4. Целые числа a, b, c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 7$. Докажите, что $abc \vdots 7$.

5. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

6. Существует ли такое n, что $n^2 + n + 1$ делится на 2015?

Графы

7. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого в классе не менее 12 друзей.

8. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть состоящую из одной части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

9. Докажите, что в любом дереве количество ребер на 1 меньше количества вершин.

Конкурсная задача

Задача №3. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Странствующий рыцарь выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, по очереди сворачивает то на самую левую, то на самую правую дорогу. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.