

# Линейные диофантовы уравнения

0. Решите в целых числах уравнение  $5x + 3y = 7$ .

!! Линейное представление НОД.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ (} a \text{ и } b \text{ не равны } 0 \text{ одновременно)} \quad \exists k, m \in \mathbb{Z} \quad (a, b) = ak + bm$$

!! Критерий разрешимости линейного диофантина уравнения.

Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными

$$ax + by = c$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c : (a, b).$$

Решение имеет вид  $x = x_0 + \frac{b}{(a, b)} \cdot w, \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)} \cdot w, \quad w \in \mathbb{Z}$ .

1. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнения

(a)  $2x + 3y = 7$ ;      (b)  $6x - 9y = 11$ ;      (c)  $-21x - 35y = 14$ .

2. Докажите, что уравнение  $ax + by = c$  имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение  $ax + by = c - 2a - 3b$  имеет решение в целых числах.

3. Сколько существует пар  $(s, t)$  таких, что  $5s + 9t = 7$  и  $|2s - 3t| < 100$ ?

4. Сколько решений уравнения  $60^\alpha \cdot \left(\frac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$  удовлетворяет условию  $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$ ?

5. Решите уравнение  $\sin^2\left(4z + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку  $[0, 1000\pi)$ ?

6. При каких  $a, b \in \mathbb{Z}$  система  $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$  имеет решение  $x, y \in \mathbb{Z}$ ?

7. Какие значения может принимать выражение  $35u - 21v$  при целых  $u$  и  $v$ ?

8. При каких целых  $n$  сократима дробь  $\frac{4n+5}{7n+3}$ ?

9. Каким может быть  $(3m - k, 5k + 2m)$ , если известно, что числа  $m$  и  $k$  взаимно просты?

10. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $2x + 3y + 5z = 11$ .

# Линейные диофантовы уравнения

0. Решите в целых числах уравнение  $5x + 3y = 7$ .

!! Линейное представление НОД.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \text{ (} a \text{ и } b \text{ не равны } 0 \text{ одновременно)} \quad \exists k, m \in \mathbb{Z} \quad (a, b) = ak + bm$$

!! Критерий разрешимости линейного диофантина уравнения.

Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными

$$ax + by = c$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c : (a, b).$$

Решение имеет вид  $x = x_0 + \frac{b}{(a, b)} \cdot w, \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)} \cdot w, \quad w \in \mathbb{Z}$ .

1. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнения

(a)  $2x + 3y = 7$ ;      (b)  $6x - 9y = 11$ ;      (c)  $-21x - 35y = 14$ .

2. Докажите, что уравнение  $ax + by = c$  имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда уравнение  $ax + by = c - 2a - 3b$  имеет решение в целых числах.

3. Сколько существует пар  $(s, t)$  таких, что  $5s + 9t = 7$  и  $|2s - 3t| < 100$ ?

4. Сколько решений уравнения  $60^\alpha \cdot \left(\frac{500}{3}\right)^\beta \cdot 360^\gamma = 12960$  удовлетворяет условию  $|\alpha + \beta + \gamma| < 71$ ?

5. Решите уравнение  $\sin^2\left(4z + \frac{3\pi}{5}\right) + \cos^2\left(5z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Сколько решений этого уравнения принадлежат промежутку  $[0, 1000\pi)$ ?

6. При каких  $a, b \in \mathbb{Z}$  система  $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ bx + 3y = 1, \end{cases}$  имеет решение  $x, y \in \mathbb{Z}$ ?

7. Какие значения может принимать выражение  $35u - 21v$  при целых  $u$  и  $v$ ?

8. При каких целых  $n$  сократима дробь  $\frac{4n+5}{7n+3}$ ?

9. Каким может быть  $(3m - k, 5k + 2m)$ , если известно, что числа  $m$  и  $k$  взаимно просты?

10. Решите в  $\mathbb{Z}$  уравнение  $2x + 3y + 5z = 11$ .