ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. В клетке находятся фазаны и кролики, причем голов — 15, а ног — 48. Сколько кроликов и фазанов обитает в клетке?

Задача 2. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна, заплатив 540 рублей. Аршин черного сукна стоит 3 рубля, а синего — 5 рублей. Сколько он купил того и другого сукна?

Задача 3. Океанский лайнер отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 километров, за ним, со скоростью в 10 раз больше скорости лайнера, вылетел самолет. На каком расстоянии от берега самолет догонит лайнер?

Задача 4. Расстояние между пунктами A и B равно 96 километров. Из пункта A одновременно отправились вниз по течению плот и катер. Известно, что катер дошел до пункта B и вернулся обратно за 14 часов, встретив на обратном пути плот в 24 километрах от пункта A. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

Задача 5. Расстояние между пунктами A и B равно 40 километров. Из пункта A в пункт B выезжает мотоциклист со скоростью 23 км/ч. Из пункта B в пункт A уже движется мотоциклист со скоростью 17 км/ч. От одного мотоциклиста к другому (из A в B) с начала движения до момента встречи без устали летает муха. Сколько километров она налетает, если: а) ее скорость равна 40 км/ч, б) ее скорости 40 км/час при движении из A в B и 30 км/час на обратном пути.

Задача 6. Цену на товар снизили на 10 %, затем еще на 10 %. В другой фирме цену снизили сразу на 20 %. Где выгоднее купить товар?

Задача 7. Из бутыли с 12%-ным раствором соли вылили 1 литр раствора и сосуд долили водой, затем повторили эту операцию. Найдите объем сосуда, если в нем остался 3%-ный раствор соли.

Задача 8. Из сосуда, до краев наполненного глицерином, вылили 2 литра глицерина и залили на их место 2 литра воды, после перемешивания снова вылили 2 литра получившегося и опять залили 2 литра воды. Затем повторили эту в третий раз. В итоге воды стало на 3 литра больше, чем глицерина. Сколько в этом сосуде воды и глицерина?

Задача 9. Имеются 80%-ный и 20%-ный растворы кислоты. В каком соотношении их надо смешать друг с другом, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты? По сколько литров их нужно взять, если требуется 30 литров этого раствора?

Задача 10. Велосипедист, пешеход и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был впереди уже на 10 километров. Когда мотоциклист его догнал, велосипедист отставал от них на 5 километров, а когда пешехода догнал велосипедист, мотоциклист находился на расстоянии x километров от них. Найдите x.

Задача 11. Два тела, движущиеся по окружности в одном направлении, встречаются каждые 112 минут, а движущиеся в противоположные стороны — каждые 16 минут. Во втором случае за 12 секунд тела сближались на 14 метров (считая по окружности). Сколько метров в минуту проходит каждое тело? Какова длина окружности?

Задача 12. По окружности радиуса R в одинаковом направлении движутся две точки со скоростями v_1 и v_2. Они начинают движение из диаметрально противоположных точек. Найдите расстояние между ними (не по окружности) через время t.

Задача 13. Расстояние между двумя колхозами — 12 километров. Колхозник вышел из своего колхоза в 9 часов 25 минут, а пришел в другой в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь в 11 часов и пришел к 14 часам 40 минутам. Укажите, на каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который он проходил в одно и то же время как на прямом, так и на обратном пути.

Задача 14. Два пешехода идут навстречу друг другу, один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из пункта A на 6 часов позже, чем второй из пункта B, и при встрече, оказывается, что он прошел на 12 километров меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в пункт B через 8 часов, а второй приходит в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите их скорости.

Задача 15. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. При встрече оказалось, что первый приехал на 30 километров больше другого и через 4 дня будет в пункте B, а второй попадет в пункт A через 9 дней после встречи. Найдите $|AB|$.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, решаемые арифметически

Задача 1. В клетке находятся фазаны и кролики, причем голов — 15, а ног — 48. Сколько кроликов и фазанов обитает в клетке?

I способ.

Пусть x — фазаны, а y — кролики.

Решим систему

$$\begin{cases} x+y=15, \\ 2x+4y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15-y, \\ 2(15-y)+4y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15-y, \\ 2y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=9. \end{cases}$$

II способ.

Если все животные — фазаны, то у них 30 лап, а по условию их 48. Для преобразования фазана в кролика требуется 2 ноги. Итого кроликов $\frac{18}{2}=9$, а фазанов — $15-9=6$.

Ответ: 9 кроликов, 6 фазанов.

Задача 2. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна, заплатив 540 рублей. Аршин черного сукна стоит 3 рубля, а синего — 5 рублей. Сколько он купил того и другого сукна?

Пусть все купленное сукно черное, тогда оно бы стоило 414 рублей, но потрачено 540 рублей. Осталось 126 рублей. Куплено $\frac{126}{2}=63$ аршина синего сукна, остальные 75 аршин — черное сукно.

Ответ: 63 аршина синего сукна, 75 — черного.

Задача 3. Океанский лайнер отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 километров, за ним, со скоростью в 10 раз больше скорости лайнера, вылетел самолет. На каком расстоянии от берега самолет догонит лайнер?

I способ.

Скорость сближения равна $10v-v=9v$. За время полета самолета лайнер пройдет путь в 9 раз меньше пути самолета, то есть $\frac{180}{9}=20$ километров от берега. Тогда точка встречи — 200 километров от берега.

II способ.

$$vt+180=10vt \Leftrightarrow vt=20.$$

Таким образом, расстояние равно $180+20=200$ километров от берега.

Ответ: на расстоянии, равном 200 километров от берега.

Задача 4. Расстояние между пунктами A и B равно 96 километров. Из пункта A одновременно отправились вниз по течению плот и катер. Известно, что катер дошел до пункта B и вернулся обратно за 14 часов, встретив на обратном пути плот в 24 километрах от пункта A. Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

I способ.

1. Отношение скоростей катера по и против течения равно $\frac{96}{72}=\frac{4}{3}$.

2. Отношение времен движения тогда — $\frac{3}{4}$, причем всего 14 часов. Тогда катер плыл 6 и 8 часов соответственно, его скорости были 96/6 и 72/6 км/час, а скорость течения реки 0,5(96–12)=2 км/час, собственная скорость катера 14 км/час.

II способ.

Пусть v (км / ч) — собственная скорость катера, а u (км / ч) — скорость течения реки.

Решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{96}{v+u}+\dfrac{96}{v-u}=14, \\ \dfrac{96}{v+u}+\dfrac{72}{v-u}=\dfrac{24}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u,\ v>0, \\ 48(v-u)+48(v+u)=7(v+u)(v-u), \\ 4(v-u)u+3(v+u)u=(v+u)(v-u) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u,\ v>0, \\ 96v=7(v+u)(v-u), \\ 7vu-u^2=v^2-u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u,\ v>0, \\ 96v=7(v+u)(v-u), \\ v(7u-v)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u,v>0, \\ 96v=7(v+u)(v-u), \\ v=7u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u,v>0, \\ 672u=336u^2, \\ v=7u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2, \\ v=14. \end{cases}$$

Ответ: 14 км/ч и 2 км/ч.

Две важные задачи про муху

Расстояние между пунктами A и B равно 40 километров. Из пункта A в пункт B выезжает мотоциклист со скоростью 23 км / ч . Из пункта B в пункт A уже движется мотоциклист со скоростью 17 км / ч . От одного мотоциклиста к другому (из A в B) с начала движения до момента встречи без устали летает муха. Сколько километров она налетает, если: а) ее скорость равна 40 км / ч , б) ее скорости 40 км/час при движении из A в B и 30 км/час на обратном пути.

а) За час, летая со скоростью 40 км/час, муха налетала 40 километров.

б) Пусть в направление из пункта A в пункт B муха пролетела x километров, а в обратном направлении — $x-23$ километра, тогда потраченное время есть:

$$\frac{x}{40}+\frac{x-23}{30}=1 \Leftrightarrow 30x+40(x-23)=120 \Leftrightarrow x=\frac{104}{7} \text{ км.}$$

А пройденный путь есть $x+(x-23)=\dfrac{263}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{212}{7}$ км. Т. е. муха пролетит $30\dfrac{2}{7}$ км.

Примечание: зачастую удобнее рассматривать весь процесс в целом, а не его отдельные части.

Задачи на проценты

Задача 1. Цену на товар скинули на 10 %, затем еще на 10 %. А в другой фирме цену скинули сразу на 20 %. Где выгоднее купить товар?

Пусть начальный уровень цен — x рублей. Тогда

1. Первая фирма — $0{,}81x$, цена опустилась на 19 %.
2. Вторая фирма — $0{,}8x$, цена опустилась на 20 %.

Ответ: выгоднее купить товар во второй фирме.

Задача 2. Из бутыли с 12%-ным раствором соли вылили 1 литр раствора и сосуд долили водой, затем повторили эту операцию. Найдите объем сосуда, если в нем остался 3%-ный раствор соли.

Будем следить за количеством соли в сосуде объемом x литров.

1. До переливания: 12 %, $0{,}12x$, доля — $0{,}12$.
2. После первой операции: $0{,}12x-0{,}12\cdot 1$, доля составит $\dfrac{0{,}12x-0{,}12}{x}$.

3. После второй операции: $0{,}12x-0{,}12-\dfrac{0{,}12x-0{,}12}{x}=\dfrac{0{,}12(x-1)^2}{x}$, доля — $\dfrac{0{,}12(x-1)^2}{x^2}$.

Решим уравнение

$$\frac{0{,}12(x-1)^2}{x^2}=0{,}03\Leftrightarrow 0{,}12(x-1)^2=0{,}03x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}12x^2-0{,}24x+0{,}12-0{,}03x^2=0\Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3},\\ x=2.\end{array}\right.$$

Так как $x>1$ (по условию), то $x=2$.
Ответ: объем сосуда — 2 литра.

Задача 3. Из сосуда, до краев наполненного глицерином, вылили 2 литра глицерина и залили на их место 2 литра воды, после перемешивания снова вылили 2 литра получившегося и опять залили 2 литра воды. Затем повторили эту операцию в 3 раз. В итоге воды стало на 3 литра больше, чем глицерина. Сколько в этом сосуде воды и глицерина?

Будем следить за глицерином.

1. Пусть вначале его было x литров, доля — 1.
2. После первого переливания осталось $x-2$ литра, доля — $\dfrac{x-2}{x}$.
3. После второго переливания осталось $x-2-\dfrac{2(x-2)}{x}=\dfrac{(x-2)^2}{x}$ литров, доля составила $\dfrac{(x-2)^2}{x^2}$.
4. После третьего переливания осталось $\dfrac{(x-2)^3}{x^2}$ литров, доля — $\dfrac{(x-2)^3}{x^3}$.

Решим уравнение

$$\frac{(x-2)^3}{x^2}+\frac{(x-2)^3}{x^3}+3=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ 2(x-2)^3+3x^2=x^3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ 2(x^3-6x^2+12x-8)+3x^2=x^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ (x-1)(x^2-8x+16)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4.\end{array}\right.$$

По смыслу задачи $x>2$, тогда 4 литра — искомая емкость сосуда, тогда глицерина — $0{,}5$ литров, а воды — $3{,}5$.
Ответ: воды — $3{,}5$ литра, глицерина — $0{,}5$.

Задача 4. Имеются 80%-ный и 20%-ный растворы кислоты. В каком соотношении их надо смешать друг с другом, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты? По сколько литров их нужно взять, если требуется 30 литров этого раствора?

I способ.

Правило «Креста»

$$\begin{array}{ccc}20\,\% & & 20\,\%\\ & \diagdown\ \ \diagup & \\ & 60\,\% & \\ & \diagup\ \ \diagdown & \\ 80\,\% & & 40\,\%.\end{array}$$

Смешиваем в отношении $\dfrac{20}{40}=\dfrac{1}{2}$. Нужно 10 литров 80 % раствора и 20 литров 20 % раствора.

II способ.
Пусть взято x литров 80%-го раствора и y литров 20%-го раствора.
Решим систему

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 0,2x+0,8y=0,6(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30-y \\ 2x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=20. \end{cases}$$

Ответ: 10 литров 80%-го раствора и 20 литров 20%-го раствора.

Задача 5. Велосипедист, пешеход и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был впереди уже на 10 километров. Когда мотоциклист его догнал, велосипедист отставал от них на 5 километров, а когда пешехода догнал велосипедист, мотоциклист находился на расстоянии x километров от них. Найдите x.
Примечание: если систему из трех уравнений с шестью переменными решить не удастся, то надо попробовать решить задачу арифметическим способом.
Пусть $v_{\text{М}}$ (км/ч), $v_{\text{В}}$ (км/ч), $v_{\text{П}}$ (км/ч) — скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода, соответственно. Известно так же, что t_1 — время встречи мотоциклиста и велосипедиста, t_2 — время встречи мотоциклиста и пешехода и t_3 — время встречи велосипедиста и пешехода.
Решим систему

$$\begin{cases} v_{\text{М}}(t_2-t_1)=v_{\text{П}}(t_2-t_1)+10 \\ v_{\text{В}}(t_2-t_1)=v_{\text{П}}(t_2-t_1)+5 \\ v_{\text{В}}(t_3-t_2)=v_{\text{П}}(t_3-t_2)+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v_{\text{М}}-v_{\text{П}})(t_2-t_1)=10 \ (1), \\ (v_{\text{В}}-v_{\text{П}})(t_2-t_1)=5 \ (2), \\ (v_{\text{В}}-v_{\text{П}})(t_3-t_2)=5 \ (3). \end{cases}$$

Таким образом,

$$x=v_{\text{М}}(t_3-t_2)-v_{\text{П}}(t_3-t_2)=(v_{\text{М}}-v_{\text{П}})(t_3-t_2).$$

Найти введенные переменные порознь невозможно, однако можно найти их комбинации. Так как из второго и третьего уравнений следует, что $t_3-t_2=t_2-t_1$, то

$$(v_{\text{М}}-v_{\text{П}})(t_2-t_1)=(v_{\text{М}}-v_{\text{П}})(t_3-t_2)=10,$$
$$x=\frac{(1)}{(2)}\cdot(3)=10 \text{ км}.$$

Ответ: 10 километров.

Задачи на движение по окружности

Задача 1. Два тела, движущиеся по окружности в одном направлении, встречаются каждые 112 минут, а движущиеся в противоположные стороны — каждые 16 минут. Во втором случае за 12 секунд тела сближались на 14 метров (считая по окружности). Сколько метров в минуту проходит каждое тело? Какова длина окружности?
Пусть v_1 и v_2 — скорости тел, c — длина окружности.
Решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{c}{v_2-v_1}=112 \\ \dfrac{c}{v_2+v_1}=16 \\ \dfrac{v_2+v_1}{5}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2-v_1=\dfrac{70\cdot16}{112} \\ v_2+v_1=70 \\ c=70\cdot16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=30 \text{ м/мин}, \\ v_2=40 \text{ м/мин}, \\ c=1120 \text{ м}. \end{cases}$$

Ответ: скорость первого 30 м/мин, второго — 40 м/мин, длина окружности равна 1120 м.

Задача 2. По окружности радиуса R в одинаковом направлении движутся две точки со скоростями v_1 и v_2. Они начинают движение из диаметрально противоположных точек. Найдите расстояние между ними (не по окружности) через время t.

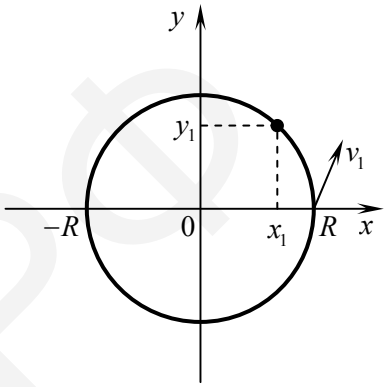
Будем определять расстояние между точками по теореме косинусов, вычислив предварительно угол между радиусами, проведенными к этим точкам.

Введем декартову систему координат (ДСК) с центром в центре окружности так, чтобы начальные координаты точек были $(-R;\,0)$ и $(R;\,0)$.

Через время t координаты точек будут.

1. За время t точка пройдет расстояние $v_1 t$ и сместится на угол $\dfrac{v_1 t}{R}$,

вторая точка — на угол $\dfrac{v_2 t}{R}$.



2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\dfrac{v_1 t}{R} \\ y_1 = R\sin\dfrac{v_1 t}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = R\cos\left(\dfrac{v_2 t}{R}+\pi\right) \\ y_1 = R\sin\left(\dfrac{v_2 t}{R}+\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -R\cos\dfrac{v_2 t}{R}, \\ y_1 = -R\sin\dfrac{v_2 t}{R}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$d = \sqrt{R^2\left(\cos\frac{v_1 t}{R}+\cos\frac{v_2 t}{R}\right)^2 + R^2\left(\sin\frac{v_1 t}{R}+\sin\frac{v_2 t}{R}\right)^2} =$$

$$= R\cdot\sqrt{\cos^2\frac{v_1 t}{R}+2\cdot\cos\frac{v_1 t}{R}\cdot\cos\frac{v_2 t}{R}+\cos^2\frac{v_2 t}{R}+\sin^2\frac{v_1 t}{R}+2\cdot\sin\frac{v_1 t}{R}\cdot\sin\frac{v_2 t}{R}+\sin^2\frac{v_2 t}{R}} =$$

$$= R\cdot\sqrt{2+2\cos\left(\frac{v_1 t}{R}-\frac{v_2 t}{R}\right)} = R\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2\left(1+\cos\left(\dfrac{v_1 t}{R}-\dfrac{v_2 t}{R}\right)\right)}{2}} = 2R\left|\cos\frac{(v_1-v_2)t}{2R}\right|.$$

Ответ: искомое расстояние равно $2R\left|\cos\dfrac{(v_1-v_2)t}{2R}\right|$.

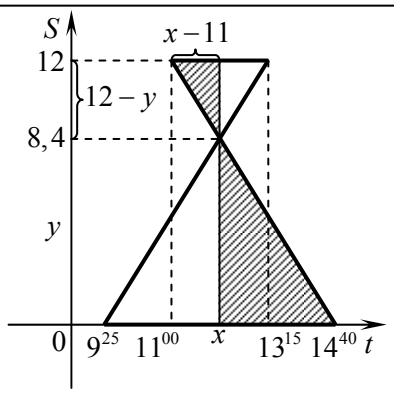
Примечание: в декартовой системе координат (ДСК) расстояние между точками с координатами $(x_1;\,y_1)$ и $(x_2;\,y_2)$ есть $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Примеры графических решений задач на движение

Задача 1. Расстояние между двумя колхозами — 12 километров. Колхозник вышел из своего колхоза в 9 часов 25 минут, а пришел в другой в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь в 11 часов и пришел к 14 часам 40 минутам. Укажите, на каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который он проходил в одно и то же время как на прямом, так и на обратном пути.

1. Так как нижний треугольник с основанием 5,25 подобен верхнему треугольнику с основанием 2,25, их высоты относятся как основания: $\dfrac{y}{12-y}=\dfrac{5,25}{2,25}\Leftrightarrow y=8,4$ км.

2. Заштрихованные треугольники подобны. Их высоты равны 8,4 и 3,6, а основания — $\frac{44}{3}-x$ и $x-11$.

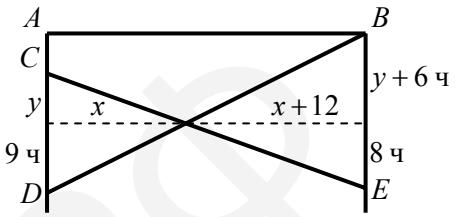


Решим уравнение

$$\frac{\frac{44}{3}-x}{x-11}=\frac{8,4}{3,6}\Leftrightarrow x=12,1 \text{ часа.}$$

Ответ: на расстоянии $8,4$ километров.

Задача 2. Два пешехода идут навстречу друг другу, один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из пункта A на 6 часов позже, чем второй из пункта B, и при встрече, оказывается, что он прошел на 12 километров меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в пункт B через 8 часов, а второй приходит в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите их скорости.

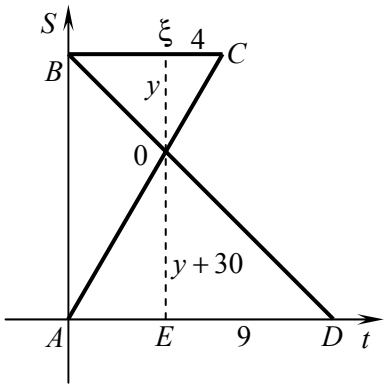


Решим задачу графически (см. рисунок):

$$\begin{cases}\frac{y}{8}=\frac{9}{y+6},\\ \frac{y}{x}=\frac{8}{x+12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6,\\ \frac{6}{x}=\frac{8}{x+12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6,\\ x=36.\end{cases}$$

Скорость первого пешехода — $x:y=6$ км/ч, скорость второго пешехода — $(x+12):(y+6)=4$ км/ч.
Ответ: 6 км/ч, 4 км/ч.

Задача 4. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. При встрече оказалось, что первый приехал на 30 километров больше другого и через 4 дня будет в пункте B, а второй попадет в пункт A через 9 дней после встречи. Найдите $|AB|$.



1. Треугольники $O\xi B$ и OED подобны, тогда

$$\frac{y}{y+30}=\frac{B\xi}{ED}\Leftrightarrow\frac{y}{y+30}=\frac{B\xi}{9}.$$

Пусть $B\xi=x$. Тогда

$$\frac{y}{y+30}=\frac{x}{9}.$$

2. Треугольники OBC и OAD подобны, тогда

$$\frac{y}{y+30}=\frac{x+4}{x+9}.$$

3. Решим систему

$$\begin{cases}\frac{y}{y+30}=\frac{x}{9}\\ \frac{y}{y+30}=\frac{x+4}{x+9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+4}{x+9}=\frac{x}{9}\\ \frac{y}{y+30}=\frac{x}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-9\\ 9(x+4)=x(x+9)\\ \frac{y}{y+30}=\frac{x}{9}\end{cases}\Leftrightarrow$$

ЯКОВ.РФ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ 9(x+4) = x(x+9) \\ \dfrac{y}{y+30} = \dfrac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ x^2 = 36 \\ \dfrac{y}{y+30} = \dfrac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 6 \end{array}\right. \\ \dfrac{y}{y+30} = \dfrac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 60. \end{cases}$$

4. Искомое расстояние (при $y = 60$ км.) равно $y + 30 + y = 150$ км.
Ответ: 150 километров.

Ягубов.рф