ФУНКЦИИ. ПРОГРЕССИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОИЗВОДНАЯ

Глава 1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие функции – одно из важнейших понятий математики. С развитием математики оно подвергалось неоднократным обобщениям и уточнениям.

При изучении закономерностей, существующих в природе, приходится встречаться с разными величинами: длиной, площадью, объемом, температурой, силой, скоростью, ускорением и т.д. Характерным свойством всякой величины является то, что она может быть измерена сравнением ее с выбранной единицей измерения того же рода, что и измеряемая величина. Результатом такого измерения является число. Например, при измерении длины некоторого отрезка прямой с помощью другого отрезка прямой, выбранного за единицу измерения, получим рациональное число, если эти отрезки соизмеримы, и иррациональное число, если они несоизмеримы. Это число в каждом случае называется значением длины данного отрезка при выбранной единице измерения.

Величины, значения которых полностью определяются заданием числа, называются *скалярными* (длина, площадь, объем, температура и др.). В связи с этим действительные числа иногда называют скалярами.

Скалярные величины делят на два вида: переменные и постоянные.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Постоянной величиной называется величина, принимающая одно и то же числовое значение, т.е. множество всех значений постоянной величины – одноэлементное числовое множество.

В математике принято рассматривать постоянную величину как частный случай переменной, все значения которой равны между собой. Абсолютной постоянной величиной называется величина, которая принимает одно и то же значение независимо от того, в каком процессе или условиях она рассматривается. Например, отношение длины окружности к ее диаметру – абсолютная постоянная, равная π.

Постоянная величина, которая в данном процессе принимает одно и то же значение, а в другом процессе (при других условиях) может принимать различные числовые значения (быть переменной), называется *параметром*. Например, температура в изотермических процессах принимает одно и то же числовое значение, т.е. является параметром.

Ягубов Ф.Ф.

В природе существует много величин, которые связаны между особой так, что каждому значению одной из них соответствует вполне определенное значение другой. Такую связь между величинами называют ***функциональной зависимостью***.

Очень плодотворным для математики оказалось определение понятия функции, связанное с понятием функциональной зависимости, введенное русским математиком Н.И. Лобачевским и немецким математиком П. Дирихле. Поскольку этим определением пользуются в математике до настоящего времени, приведем его.

Величина y называется *функцией переменной величины* x, если задано правило (закон), по которому каждому числовому значению переменной величины x из множества ее значений соответствует некоторое вполне определенное числовое значение величины y. Записывают это так: $y = f(x)$, где x – независимая переменная или аргумент; f – правило соответствия; y – зависимая переменная или функция.

В XX в. в математику интенсивно проникает теоретико-множественный подход, на основании которого обобщаются основные понятия и в связи с этим расширяется область ее применения в различных сферах человеческой деятельности. Определение понятия функции дается через отображение.[*)]

Пусть даны два множества A и B, элементами которых могут быть самые разнообразные объекты. Функцией или функциональным соответствием называется такое соответствие f, которое каждому элементу $a \in A$ относит только один вполне определенный элемент $b \in B$.

[*)] Подробно см. Ф.П. Яремчук и П.А. Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Киев: Наукова Думка. 1987. – С. 14.

Глава 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

Если элементами множеств A и B являются только числа, то f называется ***числовой функцией***; в частности, если эти числа действительные (вещественные), то функция называется ***функцией действительной*** (вещественной) ***переменной*** или действительного аргумента.

Ниже будут рассматриваться в основном функции действительной переменной. Остановимся подробнее на этом важном понятии.

Пусть X – множество действительных чисел $(X \subset R)$. Если каждому числу $x \in X$ по некоторому правилу (закону) f соответствует только одно число $y \in Y$ $(Y \subset R)$, то говорят, что на множестве X задана функция действительной переменной. Записывают это так:

$x \overset{f}{\to} y$, где $x \in X$, $y \in Y$ или $x \to y = f(x)$, или $y = f(x)$.

Множество X называется *областью задания* или *областью определения функции*. Область определения функции обозначают $D(f)$ или D_f, т.е. $D(f) = X$.

Величина y, или $f(x)$, называется *значением функции*.

Множество Y всех значений y, или $f(x)$, называется *областью значений* или *областью изменения функции*. Область значений функции обозначают $E(f) = Y = \{y \in Y \,|\, y = f(x)\}$.

Введенное понятие функции действительной переменной символически можно записать так:

$$R \supset X \in x \overset{f}{\to} y \in Y \subset R.$$

Таким образом, понятие функции, обозначаемое буквой f, следует понимать как единое целое, состоящее из трех составных частей:

а) области определения функции X (или $D(f)$), причем $X \subset R$;

б) множества значений функции Y (или $E(f)$), содержащегося в R, т.е. $Y \subset R$;

в) правила (закона) f, по которому каждому $x \in X$ определяется единственное значение $y \in Y \subset R$.

Функция есть отображение множества X на множество Y, что записывают так:

$$Y = f(x) \text{ или } X \to Y.$$

Ягубов Р.

Эта же функция есть отображение множества X в множество R (или на множество R, если $Y = R$).

Областью определения функции действительной переменной может быть любое наперед заданное непустое множество действительных чисел.

Одним из фундаментальных фактов, установленных в математике, является взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой линии, которая в этом случае называется *числовой прямой* или *действительной осью*.

Действительные числа служат для выражения значений (меры) непрерывных величин: длин, площадей, объемов, времени и т.д. В связи с этим множество действительных чисел (или множество точек прямой) называется *непрерывным*.

Если величина произвольно может принимать любое из значений некоторого заданного числового множества, то она называется *независимой переменной*. Независимая переменная, принимающая (пробегающая) все действительные значения или все действительные значения, заключенные между двумя действительными числами, называется *непрерывной переменной*. Например, переменная, принимающая все действительные значения от 0 до 5, т.е. $x \in \{x \in R \mid 0 \le x \le 5\}$, непрерывна.

Числовая функция чаще всего задается на множестве (области ее определения) в виде интервала (промежутка) или совокупности интервалов (промежутков).

Числовым интервалом называется множество действительных чисел, состоящее из чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, где a и b – фиксированные числа, которые называются соответственно началом и концом интервала.

В зависимости от того, включаются или не включаются концы интервала в рассматриваемое множество, употребляются различные обозначения и названия:

$[a;b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – замкнутый интервал (промежуток) или отрезок;

$]a;b[= (a;b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – открытый интервал (интервал);

$]a;b] = (a;b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ – полуоткрытый интервал слева (полуинтервал);

$[a;b[= [a;b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ – полуоткрытый интервал справа (полуинтервал);

$[a;+\infty[= [a;+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\}$ – бесконечный промежуток (луч числовой прямой с началом в точке a);

$]a;+\infty[= (a;+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$ – бесконечный интервал (луч с началом в точке a, которая ему не принадлежит);

$]-\infty;b] = (-\infty;b] = \{x \in R \mid x \le b\}$ – бесконечный промежуток (луч числовой прямой с началом в точке b);

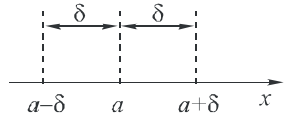
$]-\infty;b[= (-\infty;b) = \{x \in R \mid x < b\}$ – бесконечный интервал (луч числовой прямой с началом в точке b, которая ему не принадлежит);

$]-\infty;+\infty[= (-\infty;+\infty) = R$ – бесконечный интервал (числовая прямая).

Промежуток – общее название для всех приведенных выше множеств.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ означают, что величина x может принимать как угодно большие по модулю значения (отрицательные и положительные), а также отсутствие в промежутке соответственно левого или правого конца.

Окрестностью числа называется любой числовой интервал, содержащий данное действительное число. Удобно рассматривать окрестности, симметричные относительно данного числа (точки) (см. рис.).



Дельта (δ)-окрестностью числа a $(\delta > 0)$ называется промежуток $(a-\delta;\ a+\delta) = \{x \in R \mid a-\delta < x < a+\delta\}$ или $|x - a| < \delta$. Геометрически δ – окрестность точки a есть множество всех точек числовой прямой, расстояние которых от точки a меньше δ ($\delta > 0$).

Изолированной точкой называется точка множества, в некоторой окрестности которой нет других точек этого множества.

Переменная называется *дискретной*, если область ее изменения является дискретным множеством, т.е. состоящим только из изолированных точек. Например, если переменная принимает значения только из множества N или множества Z, то она дискретная.

Множество действительных чисел можно упорядочить так, чтобы каждое последующее число было больше своего предыдущего. Если такое множество является областью изменения переменной, то такая переменная называется *монотонной* (монотонно возрастающей, если числа расположены от меньшего к большим, и монотонно убывающей, – если от большего к меньшим).

Существуют переменные, которые не относятся ни к непрерывным, ни к дискретным, например, переменная x, принимающая все значения из множества $X = \{x \in R \mid 0 \le x \le 4,\ x = 10,\ x = 20\}$, или переменная x, принимающая все рациональные значения, т.е. $x \in Q$.

Известно, что множество Q всюду плотно, т.е. между любыми двумя числами a и b ($a<b$) этого множества всегда находится число, принадлежащее этому множеству, например $\frac{a+b}{2}$, так как $a<\frac{a+b}{2}<b$. Это значит, что множество Q не дискретно. Известно также, что не каждой точке числовой прямой соответствует рациональное число (есть еще и иррациональные числа – действительные числа, не являющиеся рациональными). Это означает, что множество Q не является непрерывным.

Замечание. Множество Q также всюду плотно в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел, т.е. между любыми двумя действительными числами a и b найдется рациональное число.

Область изменения (значения) функции действительной переменной зависит как от области определения функции, так и от правила f, по которому каждому значению переменной x соответствует одно определенное значение $y \in R$.

При изучении функций не всегда легко точно описать область изменения функции, но это не мешает пользоваться такими функциями, так как всегда для функции $y=f(x)$ действительной переменной x известно, что $y \in E(f) \subset R$.

Для некоторых функций область их изменения известна. Например:

если $D(f)=R$ и $f: x \to y=x^2$, то $E(f)=[0;+\infty)$;

если $D(f)=R$ и $f: x \to y=\sin x$, то $E(f)=[-1;1]$;

если $D(f)=[0;8]$ и $f: x \to y=\sqrt[3]{x}$, то $E(f)=[0;2]$.

если $D(f)=R$ и $f: x \to y=x^4+3x^2+10x-2$,

то $E(f)=\{x \in R \mid y=x^4+3x^2+10x-2\}=[-8;\infty)$.

Рассмотрим основные способы задания функции.

Аналитический способ

Этот способ задания функции с помощью аналитического выражения или формулы является самым распространенным. Компактность, возможность вычисления значения функции при произвольном значении аргумента из области определения, возможность применения к данной функции аппарата математического анализа являются основными преимуществами аналитического способа задания функции. Этот способ, однако, не лишен недостатков, так как недостаточно нагляден и иногда связан с необходимостью выполнения очень громоздких вычислений.

Аналитическое выражение – это выражение, в котором используются счетное число раз математические операции и переходы к пределу по натуральным числам.

Под формулой понимают представление величины в виде некоторого выражения. Например, с помощью аналитических выражений заданы следующие функции:

$$y=x^2+1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=\frac{x^2+1}{x+2}; \quad y=\sin x;$$

$$y=\lg x; \quad y=\operatorname{arctg} x; \quad y=\cos 3x.$$

Область определения функции $y=f(x)$, заданной аналитическим выражением, есть множество всех действительных значений переменной x, при которых это выражение принимает действительные значения.

Найдем область определения D и область значений E для функции $y=x^2-4x$.

Так как выражение x^2-4x существует при всех $x \in R$, то $D=R$.

Чтобы найти область значений E, представим выражение, которым задана функция, в виде $y=(x-2)^2-4$.

Так как $0 \le (x-2)^2 < +\infty$ при всех $x \in R$, то $-4 \le (x-2)^2-4 < +\infty$, т.е. $E=\{x \in R \mid y=x^2-4x\}=[-4;+\infty)$.

В математике рассматриваются также функции, которые на различных частях (подмножествах) области их определения задаются различными аналитическими выражениями, т.е. «кусочно заданные».

Например:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x<0; \\ x, & \text{если } x \ge 0, \end{cases}$$

где $D=R$, а $E=[0;+\infty)$.

Функция Дирихле: $y=\begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q; \\ 0, & \text{если } x \in R \setminus Q, \end{cases}$

где $D=R$, а $E=\{0;1\}$.

При рассмотрении реальных задач по их условию независимая переменная может принимать только допустимые для этой задачи значения; тогда область определения функции устанавливается из условий данной задачи и подбирается аналитическое выражение, соответствующее зависимости между рассматриваемыми в задаче величинами.

ГГУ ООВР

Поэтому записывают так: $y = f(x)$, $D = [a;b]$. Например, если функция задана в виде $y = \lg x$, $1 \le x \le 10$, то $D = [1;10]$; $E = [0;1]$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$, и ее область определения отдельно не указана, то считается, что она совпадает с областью существования выражения $f(x)$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$, разрешенной относительно переменной y, то говорят, что она *задана в явном виде*. Например:

$$y = x^2; \quad y = \frac{x-1}{x^2}; \quad y = \lg x; \quad y = \sin x.$$

Если функция задана уравнением $F(x, y) = 0$, не решенным относительно переменной y, то говорят, что функция $y = f(x)$ *задана неявно*. Например:

$$x^2 + y^2 - c = 0.$$

Можно выделить две различные (непрерывные) ветви этой функции:

$$y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}.$$

Существует еще так называемое *параметрическое* задание функциональной зависимости, когда x и y являются функциями третьей величины – параметра: $\begin{cases} x = \beta(t), \\ y = \mu(t). \end{cases}$ Например: $\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi. \end{cases}$

Подумайте, как связаны y и x в данном примере?

Графический способ

Наглядным способом представления числовой функции служит ее график. Графиком функции могут быть кривая, прямая линии, множество отдельных точек и т.д.

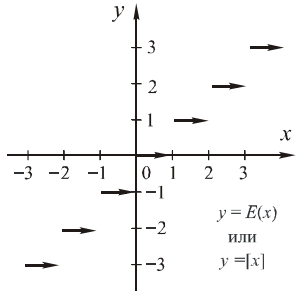
Графическим способом задания функции пользуются в технике и физике, когда он становится единственно доступным или наиболее удобным. Хотя этот способ является очень наглядным, однако он не позволяет точно определить числовые значения аргумента и функции.

Табличный способ

При этом способе значения независимой переменной x выписываются в определенном порядке $x_1, x_2, ..., x_n$, а рядом с ними указываются соответствующие им значения функции $y_1, y_2, ..., y_n$. Так построены, например, таблицы логарифмов, таблицы значений тригонометрических функций и др.

Этот способ задания функции дает возможность определить конкретные значения функции сразу, без каких-либо дополнительных вычислений, но не дает наглядного изображения изменения функции в зависимости от аргумента.

Существует еще способ задания функции с помощью антье (от франц. entier – целый) числа. Обозначается эта функция так: $y = E(x)$ или $y = [x]$ (целая часть x). Правило E для каждого $x \in R$ ставит в соответствие наибольшее целое число, не превышающее числа x.



Например: $E(0) = 0$; $E(0{,}8) = 0$;

$E(2{,}1) = 2$; $E(\sqrt{2}) = 1$; $E(-0{,}2) = -1$; $E(-2{,}3) = -3$.

График этой функции (см. рис.) представляет собой отрезки длиной в единицу, открытые справа, т.е. каждый промежуток $[n; n+1)$, где $n \in Z$, отображается этой функцией в точку $y = n$. $\forall x \in [n; n+1)\ E(x) = n$. Область определения этой функции $D = R$; множество ее значений есть множество всех целых чисел Z.

Дробной частью действительного числа x называется расстояние от x до его целой части, т.е. величина $x - [x]$.

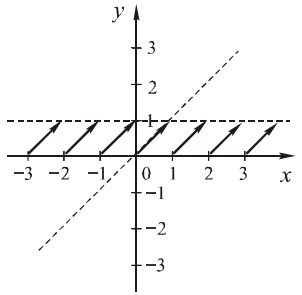
Обозначение: $\{x\} = x - [x]$.

Например: $\{0\} = 0$, $\{0{,}8\} = 0{,}8$, $\{2{,}1\} = 0{,}1$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$, $\{-0{,}2\} = 0{,}8$,

$\{-2{,}3\} = 0{,}7$.

Рассмотрим функцию $y = \{x\}$. Ее область определения $D = \mathbb{R}$; множество ее значений есть полуинтервал $[0;1)$.

$\forall x \in [n; n+1)\ \{x\} = x - n$, т.е. график функции $y = \{x\}$ состоит из полуинтервалов длины $\sqrt{2}$, на которые разбивается прямая $y = x$, смещенных до оси абсцисс.



Глава 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Элементарная функция

К основным элементарным относятся следующие функции:

степенная $y = x^a$ ($a \in R$, a – постоянная);

показательная $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$);

логарифмическая $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$);

тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

Функции классифицируются по их аналитическому заданию, в зависимости от операций, которые необходимо произвести над аргументом, чтобы получить значение функции.

Элементарными функциями называются функции, которые можно выразить через основные элементарные функции, используя конечное число раз арифметические операции и суперпозицию (см. «сложная функция»).

Функция $y = f(x)$ называется **алгебраической**, если она удовлетворяет алгебраическому уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен от двух переменных.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной**.

Например, $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; $y = \sqrt{x}$; $y = x^3 + 1$ – алгебраические функции, а $y = \sin x$; $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$, $y = \lg x$, $y = 2^x$, $y = x^{\sqrt{3}}$ – трансцендентные функции.

Рациональные функции. К ним относятся:

Целая рациональная функция или многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где n – целое неотрицательное число (степень многочлена), $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные действительные (или комплексные) числа;

дробно-рациональная функция, которая является отношением двух рациональных функций:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Иррациональной функцией называется функция, заданная аналитически с помощью иррационального алгебраического выражения, т.е. выражения, содержащего радикалы – знаки извлечения корней.

Рациональные и иррациональные функции образуют класс алгебраических функций.

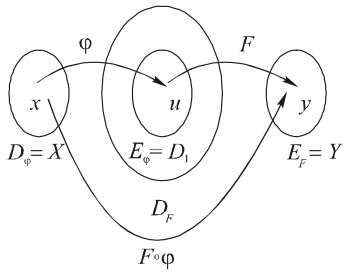
Сложная функция (функция от функции)

Пусть заданы две функции: $u = \varphi(x)$ с областью определения $D(\varphi) = X$ и областью значений $E(\varphi) = D_1$ и $y = F(x)$ с областью определения $D(F) \supset D_1$ и областью значений $E(F) = Y$; тогда $\forall x \in X$ $x \in X \xrightarrow{\varphi} u \in D_1$, $u \in D_1 \xrightarrow{F} y \in Y$ или $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{F} y$, где $x \in X$, а $y \in Y$, т.е. последовательное применение к каждому значению x соответствий φ и F определяет одно соответствующее значение y. Это записывают так:

$$y = F(\varphi(x)) \text{ или } x \xrightarrow{F \circ \varphi} y.$$

Полученная функция от функции называется *сложной функцией независимой переменной* x.

✧ Сложная функция $F(\varphi(x))$ сразу задает зависимость $y(x)$, вместо «двухшагового» определения соответствия через промежуточную переменную u.



Значение функции $u = \varphi(x)$ называют *промежуточной переменной* или *промежуточным аргументом*.

Сложную функцию $y = F(\varphi(x))$ называют также *суперпозицией* или *композицией двух функций*: внутренней φ и внешней F. Используется запись: $y = F(u)$, где $u = \varphi(x)$, и обозначение композиции $F \circ \varphi$.

Если сложная функция задана аналитически, т.е. $y = F(u)$, где $u = \varphi(x)$, то область определения внешней функции должна содержать область значений внутренней, т.е. $D(F) \supseteq E(\varphi)$.

Лубов.рф

Примеры

1. ***Задана сложная функция*** $y=\sin^2 x$.

□ Функцию можно записать так:

$$y=u^2, \text{ где } u=\sin x.$$

Здесь $F: u\to y=u^2$, а $\varphi: x\to u=\sin x$; $D(\varphi)=R$, $E(\varphi)=[-1;1]$, $D(F)=R$.

Следовательно, $E(\varphi)\subset D(F)$, т.е. область определения $D(x)=R$ и область значений $E(y)=[0;1]$.

2. ***Задана функция*** $y=\sqrt{u}$ ***, где*** $u=\cos x-2$.

□ Имеем $u\overset{F}{\to} y=\sqrt{u}$, $x\overset{\varphi}{\to} u=\cos x-2$.

Тогда $D(\varphi)=R$, $E(\varphi)=[-3;-1]$, $D(F)=R_+=[0;+\infty)$.

Так как $E(\varphi)\not\subset D(F)$, то композиция $F\circ\varphi$ не определена, т.е. формула $y=\sqrt{\cos x-2}$ никакой функции не задает.

3. ***Задана функция*** $y=F(f(\varphi(x)))$.

□ Имеем $y=F(u)$, где $u=f(v)$, $v=\varphi(x)$ – два промежуточных аргумента.

Эту функцию можно записать еще так: $x\overset{\varphi}{\to} v\overset{f}{\to} u\overset{F}{\to} y$.

Пусть $y=\cos^2 10^x$, т.е. $y=F(u)=u^2$, где $u=f(v)=\cos v$, $v=\varphi(x)=10^x$.

Чтобы эта композиция определяла некоторую функцию, необходимо, чтобы $E(\varphi)\subseteq D(f)$ и $E(f)\subseteq D(F)$.

Имеем $D(\varphi)=R$, $E(\varphi)=(0;+\infty)$, $D(f)=R$, $E(f)=[-1;1]$ и $D(F)=R$, т.е. $E(\varphi)\subset D(f)$ и $E(f)\subset D(F)$, или $(0;+\infty)\subset R$ и $[-1;1]\subset R$.

Таким образом, данная композиция задает сложную функцию с областью определения $D(x)=R$ и областью значений $E(y)=[0;1]$.

Обратная функция

Если задана функция $y=f(x)$, каждому элементу y из области значений заданной функции f можно поставить в соответствие все те элементы x из области определения функции f, для которых $f(x)=y$, т.е. $\{x\in D_f \mid f(x)=y\}$.

Полученная зависимость задает некоторую функцию, если для каждого y элемент x единственен. В таком случае новая функция называется обратной к функции f и обозначается f^{-1}.

✦ Обратная функция позволяет по значению «прямой» функции узнать, в какой точке это значение принималось.

О п р е д е л е н и е. Функции f и g называются *взаимно обратными*,

$$\text{если: } \begin{cases} 1)\ E_f=D_g; \\ 2)\ D_f=E_g; \\ 3)\ f(g(x))\equiv x. \end{cases}$$

Функция называется *обратимой*, если она имеет обратную.

Критерий обратимости. Функция обратима тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает ровно в одной точке.

Примеры

4. ***Задана функция*** $y=2x-4$ ***, областью определения*** $D=R$ ***и областью значений*** $E=R$.

□ Возьмем произвольное $y_0\in E$ и решим относительно x уравнение $y_0=2x-4$.

Уравнение имеет единственный корень $x_0=(y_0/2)+2$.

Таким образом, каждому значению $y\in E=R$ соответствует только одно значение $x\in R$, т.е. $y\to x=(y/2)+2$.

Последняя запись определяет функцию независимой переменной y с областью определения, равной области значений данной функции, и областью значений, равной области определения данной функции, т.е. обратную функцию в данном примере

$$D(f)=E(f^{-1})=R=D(f^{-1})=E(f).$$

В ы в о д. Если задана обратимая функция $y=f(x)$, то, чтобы найти обратную ей функцию f^{-1}, необходимо поменять местами переменные x и y, т.е. записать $x=f(y)$ и решить уравнение относительно переменной y.

5. ***Найти функцию, обратную функции*** $y=\dfrac{x-1}{3}(D=E=R)$.

□ Поменяв обозначения зависимой и независимой переменных, получим $x=\dfrac{y-1}{3}$; отсюда находим обратную функцию $y=3x+1$.

6. ***Является ли функция*** $f(x)=x^2$ ***обратимой? Если нет, то ограничить область определения так, чтобы функция стала обратимой, и найти обратную на каком-либо из указанных вами промежутков.***

□ На $\mathbb{R}$ данная функция не является обратимой (см. критерий), так как любое положительное значение принимает в двух точках.

На каждом из промежутков $X_1 = (-\infty;\ 0]$, $X_2 = [0;\ +\infty)$ функция обратима (см. критерий).

Найдем, например, функцию, обратную к $f(x)$ на X_1:

$y = x^2$, $x \le 0$.

$x = y^2$, $y \le 0$; $y = -\sqrt{x}$. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

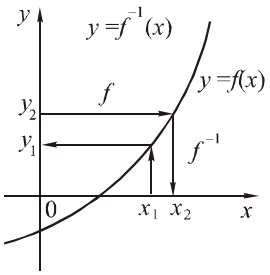
Замечания.

1. Если функция f обратима на любом множестве X, то она обратима на любом множестве X', входящем в X.

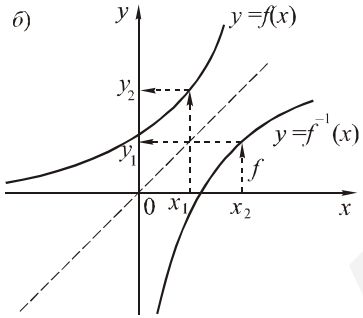
2. Обозначение f^{-1} не означает $1/f(x)$, а зарезервировано для функции, обратной к $f(x)$!

Графики взаимно обратных функций, если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ (переменные не переобозначены), представляют собой одну и ту же линию или множество точек (см. рис. *а*), а если $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ (переменные переобозначены стандартным образом), то графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (см. рис. *б*).

а)



б)



Глава 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Ограниченные и неограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной***, если можно указать такое положительное число M, что $\forall x \in D(f)$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

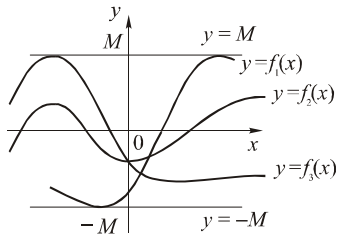


Рис. 4.1

График ограниченной функции заключен между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (рис. 4.1).

Из основных элементарных функций ограниченными являются $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$ и $\operatorname{arccosec} x$. Например, $|\cos x| \le 1$; $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$; $|\operatorname{arcctg} x| < \pi$.

Функция $y = f(x)$ называется ***неограниченной***, если для любого положительного числа M найдется такая точка $x \in D(f)$, что $|f(x)| > M$.

Покажем, что функция $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ на множестве $X = (0;+\infty)$, ограниченная.

Рассмотрим неравенство $(x-1)^2 \ge 0$, которое справедливо при $\forall x \in X$. Из этого неравенства следует, что

$$x^2 - 2x + 1 \ge 0, \quad x^2 + 1 \ge 2x,$$

$$1 \ge \frac{2x}{x^2+1}, \quad \frac{1}{2} \ge \frac{x}{x^2+1} > 0,$$

а это значит, что данная функция ограничена (рис. 4.2).

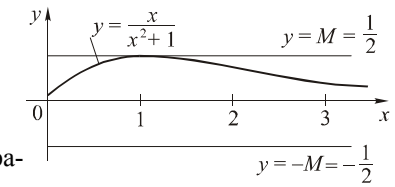
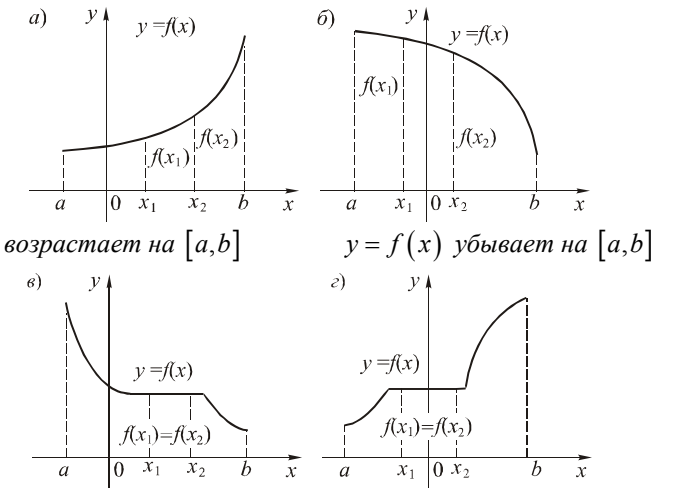


Рис. 4.2

Возрастающие и убывающие функции

Функция $y = f(x)$ действительной переменной называется ***возрастающей*** (строго возрастающей) на числовом множестве X, содержащемся в области определения функции, если для любых чисел $x_1 < x_2$ из множества X выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 4.3*а*).

ЯГУБОВ.РФ



$y = f(x)$ *возрастает на* $[a,b]$ $y = f(x)$ *убывает на* $[a,b]$

$y = f(x)$ *не возрастает на* $[a,b]$ $y = f(x)$ *не убывает на* $[a,b]$

Рис. 4.3

Если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***убывающей*** (строго убывающей) на множестве X (см. рис. 4.3*б*).

Функция действительной переменной, являющаяся во всей своей области определения возрастающей или убывающей, называется *строго монотонной.*

Функция $y = f(x)$ действительной переменной называется *неубывающей* на числовом множестве X, если для любых чисел $x_1 < x_2$ из этого множества выполняется условие $f(x_1) \le f(x_2)$ (см. рис. 4.3*г*).

Если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *невозрастающей* на X (см. рис. 4.3*в*).

Функция действительной переменной, являющаяся на множестве X возрастающей или убывающей (неубывающей или невозрастающей), называется *монотонной* (нестрого монотонной) на X.

Если функция $y = f(x)$ возрастающая (или убывающая) на множестве X, то она на этом множестве обратима, т.е. из условия $x_1 \ne x_2$ следует, что $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Сумма двух возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей).

Произведение двух **положительных** возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей).

Если функция $y = f(x)$ на X возрастает **и сохраняет знак**, то функция $1/f(x)$ убывает, и наоборот.

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ строго монотонна.

Определите, каков характер монотонности f^{-1}, если f возрастает (убывает). Докажите! (Хочется сказать наоборот, не правда ли?)

Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на множестве X, если это множество можно разбить на конечное число подмножеств так, что на каждом из них данная функция является монотонной.

Проверьте, что основные элементарные функции являются кусочно-монотонными на своих областях определения.

П р и м е р ы

1. ***Определить монотонность функции*** $y = x^2$.

□ (Решая уравнение относительно переменной x, получаем $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ при $y \ge 0$.

Областью определения функции $x = x_{1,2}(y)$ является интервал $0 \le y < +\infty$, которому соответствуют значения $-\infty < x \le 0$ и $0 \le x < +\infty$.)

Рассмотрим функцию $y = x^2$ на промежутке $(-\infty;0]$. Сравним значения функции в произвольных точках x_1 и x_2 $(x_1 < x_2 < 0)$.

Имеем: $y(x_1) - y(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$

$(x_1 < x_2,\ x_1 + x_2 < 0 + 0 = 0)$, т.е. $x_1^2 > x_2^2$.

Значит, на интервале $(-\infty;0]$ функция является убывающей. Аналогично устанавливаем, что на интервале $[0;+\infty)$ функция является возрастающей.

Замечание. Отметим, что доказывать возрастание или убывание функции можно **только** в общем виде, с **произвольными** x_1 и x_2. (Конкретная пара значений аргумента не поможет: а вдруг для других пар все будет наоборот?) Опровергнуть же утверждение о монотонности можно при помощи контрпримера.

Четные и нечетные функции

Функция $f(x)$ называется **четной**, если для всех значений переменной x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для всех значений x из области ее определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

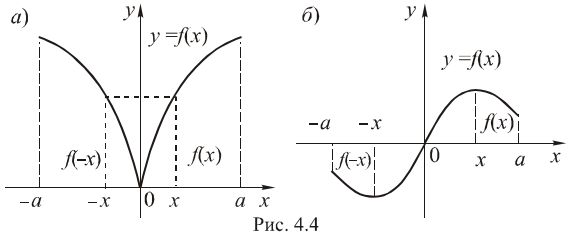


Рис. 4.4

Области определения четных и нечетных функций симметричны относительно начала координат. Это необходимое (но не достаточное) условие того, чтобы функция была четной или нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 4.4*а*), *а нечетной – относительно начала координат* (рис. 4.4*б*).

Классические примеры четных функций: $y=x^{2k}, k\in\mathbb{Z}$; нечетных: $y=x^{2k+1}, k\in\mathbb{Z}$ (см. название свойства!)

Не каждая функция является четной или нечетной. Например, функция $y = f(x) = x+1$ ни четная, ни нечетная, поскольку $f(-x)=-x+1=f(x)=x+1: x=0$; $f(x)=-x+1=-f(x)=-x-1: x\in\varnothing$. Очевидно, что каждое из равенств выполняется не для всех $x\in D_f$. Такие функции называются **функциями общего вида**. Для опровержения утверждения о четности или нечетности функции достаточно привести контрпримеры. В нашем случае: $f(2)=3$; $f(-2)=-1$. $|3|\neq|-1|$.

Функция $y = \lg x$ также не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения $(0;+\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Если функция $y = f(x)$ определена в области, симметричной относительно начала координат, но не является ни четной, ни нечетной, то ее всегда можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$F(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

причем такое представление единственно.

Проверьте, что первое слагаемое – четная функция, а второе – нечетная!

Алгебраическая сумма двух четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.

Произведение двух четных (нечетных) функций является четной функцией, а произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ нечетные, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ также нечетная.

Если внутренняя функция четная, то сложная функция четная.

Если функция $f(x)$ четная, $(f(x)\neq 0)$, то и функция $\frac{1}{f(x)}$ четная.

Для четных и нечетных функций справедливо равенство

$$|f(x)| = |f(-x)|.$$

Периодические функции

Периодической называется функция $y = f(x)$, значение которой не меняется, если к ее аргументу прибавить некоторое фиксированное ненулевое число T.

Число T называется *периодом* этой функции. Для любого x, принадлежащего области определения функции, выполняется равенство

$$f(x) = f(x+T).$$

Наименьший из положительных периодов называют *основным периодом периодической функции*.

Подумайте, у всякой ли периодической функции есть основной период?

Если периодическая функция имеет основной период T_0, то любой другой ее период будет кратным T_0.

Из основных элементарных функций периодическими являются тригонометрические функции, например $y = \sin x$ (основной период 2π), $y = \operatorname{tg} x$ (основной период π), а также функция $y = \{x\}$.

Ясно, что если целую часть x увеличить на n, то дробная часть не изменится, т.е. можно записать $\{x\} = \{x+n\}$. Наименьшим целым положительным числом в множестве Z является 1. Таким образом, основной период функции $y = \{x\}$ равен 1.

Функция y называется *антипериодической*, если

$$f(x+T) = -f(x)(T\neq 0).$$

Свойства периодических функций

1. Если T – период функции f, то $\forall k \in Z$ $k \cdot T$ – также период f.

2. Если T – период функций f и g, то $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ – периодические функции с периодом T.

3. Если T – период функции f, то сложная функция $g(f)$ – также периодическая функция с периодом T.

4. Если T_1 – период функции f, T_2 – период функции g, то $T = \text{НОК}(T_1, T_2)$ (если НОК существует!) является периодом функций $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ (см. пример 3).

5. Если T – период функции f, то T – период функций $\alpha \cdot f$, $f + \beta$, f^n, $\sqrt[m]{f}$ и т.д., где α, β, m, n – постоянные числа. (Частный случай свойства 3.)

6. Если T – период функции $f(x)$, то $T/|k|$ – период функции $f(kx)$.

П р и м е р ы

Найти период функций:

2. $f(x) = 7\sqrt[51]{\sin(3x-1)} + \pi$.

□ $T(f) = T(\sin(3x-1)) = T(\sin 3x) = \frac{1}{3}T(\sin x) = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $2\pi/3$.

3. $g(x) = \left(\text{tg}\left(6x - \frac{\pi}{315}\right) + 2\cos^2\left(9x + \sqrt{2}\right)\right)^3$.

□ $T_1 = T\left(\text{tg}\left(6x - \frac{\pi}{315}\right)\right) = T(\text{tg}\,6x) = \frac{1}{6}T(\text{tg}\,x) = \frac{\pi}{6}$.

$T_2 = T\left(2\cos^2\left(9x + \sqrt{2}\right)\right) = T\left(1 + \cos\left(18x + 2\sqrt{2}\right)\right) = T(\cos 18x) = \frac{1}{18}T(\cos x) = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$.

$T(g) = \text{НОК}(T_1;\ T_2) = \text{НОК}\left(\frac{\pi}{18} \cdot 3;\ \frac{\pi}{18} \cdot 2\right) = \frac{\pi}{18} \cdot \text{НОК}(3;\ 2) = \frac{\pi}{18} \cdot 6 = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\pi/3$.

4. $h(x) = \{\pi x + 1\}$.

□ $T(h) = T(\{\pi x\}) = \frac{1}{\pi}T(\{x\}) = \frac{1}{\pi}$.

Ответ: $1/\pi$.

Доказать, что функции не являются периодическими:

5. $t(x) = \sin x - \cos(\pi x)$.

□ $T_1 = T(\sin x) = 2\pi$; $T_2 = T(\cos \pi x) = 2\pi/\pi = 2$. Пусть T – период $t(x)$. Тогда $T = kT_1 = mT_2$, где $k,\ m \in Z$. Получаем: $k \cdot 2\pi = m \cdot 2$, $\pi = \frac{m}{k} \in Q$, что противоречит иррациональности числа π.

6. $m(x) = \{x\} + \left\{\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$.

□ $T_1 = T(\{x\}) = 1$; $T_2 = T\left\{x/\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$. Пусть T – период $m(x)$. Тогда $T = k \cdot 1 = m \cdot \sqrt{2}$. $\sqrt{2} = \frac{k}{m} \in Q$, но $\sqrt{2} \in R \setminus Q$. Противоречие.

7. $p(x) = x^2$.

□ Например: $p(x)$ имеет единственный корень $x = 0$. Любая периодическая функция либо не имеет корней, либо имеет их бесконечно много.

Максимум и минимум функций

Точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой локального минимума (локального максимума) функции*** $f(x)$, если существует такая ее окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \subset D(f)$ $(\delta > 0)$, что для всех значений x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x) \quad (f(x_0) > f(x)).$$

Значение функции в точке x_0 называется ***локальным минимумом (локальным максимумом)*** функции $f(x)$.

Таким образом, функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет локальный максимум, если значение $f(x_0)$ больше всех других ее значений, принимаемых вблизи этой точки (рис. 4.5*а*), т.е. $f(x_0) > f(x)$ $(x \neq x_0)$.

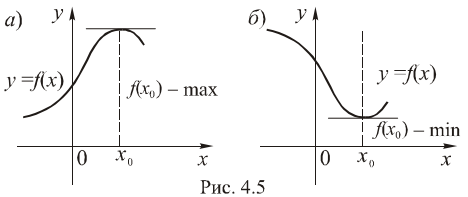


Рис. 4.5

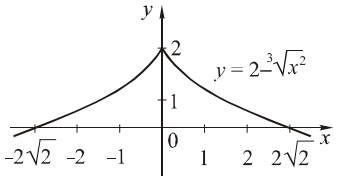


Рис. 4.6

Функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет локальный минимум, если значение $f(x_0)$ меньше всех других ее значений, принимаемых вблизи этой точки (рис. 4.5*б*), т.е. $f(x_0) < f(x)\ (x \neq x_0)$.

Максимум и минимум функции называют ***экстремумом***. Если выполняются условия $f(x_0) \le f(x)\ (f(x_0) \ge f(x))$, то экстремум (минимум или максимум) называют *нестрогим*.

Например:

1) Функция $y = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ принимает максимальное значение при $x = 0$, так как при всех $x \neq 0$ имеем $2 > 2 - \sqrt[3]{x^2}$.

2) Функции $y = x^2 + a^2$ и $y = x^2 - a^2$, где a – постоянная, имеют минимум при $x = 0$.

3) Функция $y = x^2 - 2x + 5$ имеет минимум при $x = 1$. Действительно, представим функцию в виде $y = (x-1)^2 + 4$. Так как с уменьшением переменного слагаемого сумма уменьшается, а $(x-1)^2 \ge 0$ имеет наименьшее значение при $x - 1 = 0$, или $x = 1$, то функция имеет минимум при $x = 1$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, достаточно найти ее экстремумы на этом отрезке и ее значения на концах отрезка, а затем среди этих значений взять наименьшее и наибольшее.

Примеры

8. ***Найти наибольшее*** M ***и наименьшее*** m ***значения функции*** $y = x^2 + 1$ ***на отрезке*** $[-1;3]$.

□ В точке $x = 0$ функция принимает минимальное значение $y(0) = 1$. Кроме того, $y(-1) = 2$, $y(3) = 10$. Таким образом, $M = 10$, $m = 1$.

Если функция $y = f(x)$ задана уравнением, которое разрешимо относительно x, т.е. существует функция $x = \varphi(y)$, область определения которой является областью изменения данной функции, то легко установить наибольшее и наименьшее значения данной функции в этой области.

9. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $y = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

□ Найдем множество значений функции $y = \dfrac{6x}{x^2+1}$. Рассмотрим данное равенство как уравнение с параметром y относительно переменной x (на $x^2 + 1 > 0$ можно домножить обе части!)

$$x^2 y - 6x + y = 0. \qquad (*)$$

Переформулируем задачу: «при каких значениях параметра y уравнение (*) имеет решения?»

Если $y = 0$, то уравнение линейно, оно имеет решение $(x = 0)$. Если $y \neq 0$, то условие наличия решения – неотрицательность дискриминанта: $D/4 = 9 - y^2 \ge 0$, т.е. $y \in [-3;\ 3] \setminus \{0\}$. Объединяем оба случая, получаем $y \in [-3;\ 3]$.

Ответ: наименьшее значение функции $m = -3$, а наибольшее $M = 3$.

Выпуклость и вогнутость графика функции

График функции (кривая) $y = f(x)$ называется ***выпуклым*** (обращенным выпуклостью вверх) на интервале (a,b), если любая дуга его лежит над стягивающей ее хордой (рис. 4.7*а*).

График функции (кривая) $y = f(x)$ называется *вогнутым* (обращенным выпуклостью вниз) на интервале (a,b), если любая его дуга в этом интервале лежит под стягивающей ее хордой (рис. 4.7*б*).

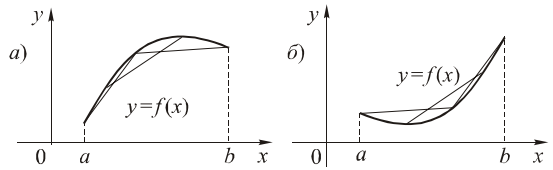


Рис. 4.7

Условие выпуклости и вогнутости графика функции заключается в следующем.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b) и график функции на этом интервале выпуклый. Возьмем два любых значения аргумента x_1 и x_2, принадлежащие интервалу (a,b). Тогда ординатами точек A и B графика функции будут соответственно значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Между точками x_1 и x_2 возьмем точку $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Тогда $f(x_0) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (рис. 4.8).

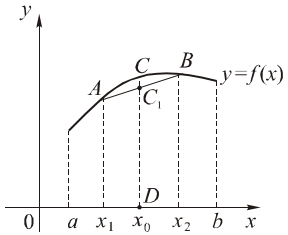


Рис. 4.8

Так как по условию график функции выпуклый, то для любых значений x_1 и x_2, точка C графика должна лежать выше точки C_1 хорды AB, т.е. $|DC| > |DC_1|$.

Находим длину средней линии трапеции Ax_1x_2B:

$$C_1D = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Таким образом, если график функции $y=f(x)$ выпуклый на интервале (a,b), то для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Аналогично можно показать, что если график функции $y=f(x)$ вогнутый на интервале (a,b), то для любых значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Приведенные неравенства являются необходимым и достаточным условием выпуклости и вогнутости графика функции.

Примеры

Исследовать на выпуклость и вогнутость графики функций:

10. $f(x)=x^2$.

□ Данная функция определена при всех действительных значениях x. Возьмем два произвольных значения аргумента x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ и выясним знак неравенства в выражении

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \vee \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

(здесь символ $\vee$ означает, что пока не известно, какая из частей неравенства больше).

В данном примере $f(x_1)=x_1^2$, $f(x_2)=x_2^2$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$.

Тогда выражение принимает вид: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \vee \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$.

Найдем разность $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2}{4} = -\frac{(x_1-x_2)^2}{4} < 0$

при любых значениях $x_1 \neq x_2$.

Тогда $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$, или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, т.е. для данной функции выполняется второе неравенство. Следовательно, график функции $f(x)=x^2$ вогнутый при $-\infty < x < +\infty$.

11. $y=\frac{1}{x}$.

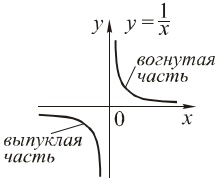
□ Данная функция определена при всех действительных значениях $x \neq 0$, т.е. на интервалах $(-\infty,0)$ и $(0;+\infty)$.

Определим знак в неравенстве $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \vee \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, которое для данной функции принимает вид $\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} \vee \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$.

Найдем разность: $\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} - \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} = -\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)}$.

На интервале $-\infty < x < 0$ разность положительна, так как $(x_1-x_2)^2>0$ и $x_1x_2>0$, а $x_1+x_2<0$, т.е.

$\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} > \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$, или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,



следовательно, кривая выпуклая.

На интервале $0 < x < +\infty$ разность отрицательна, так как $(x_1-x_2)^2>0$ и $x_1x_2>0$, а $x_1+x_2<0$, т.е. $\frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$, или $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

следовательно, кривая вогнутая.

Таким образом, график функции $y=1/x$ выпуклый при $x<0$ и вогнутый при $x>0$; при $x=0$ функция не определена (график разорван).

Лутов.рф

Глава 5. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Степенной функцией называется функция вида $y = x^a$, где x – независимая переменная (аргумент), а a – фиксированное действительное или комплексное число.

Рассмотрим основные свойства степенной функции с различными показателями.

Функции с натуральным показателем вида

$$\boxed{y = x^n}$$

где n – натуральное число.

1. Область определения: функция $y = x^n$ определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $n = 2k$ (k – натуральное число), то $0 \le x^{2k} < +\infty$;

б) если $n = 2k-1$, то $-\infty < x^{2k-1} < +\infty$.

3. Нули функции: функция $y = x^n$ обращается в ноль при $x = 0$, т.е. ее график проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства (интервалы, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения):

а) если $n = 2k$, то функция положительна при $x \ne 0$;

б) если $n = 2k-1$, то функция при $x < 0$ отрицательна, а при $x > 0$ положительна.

5. Четность и нечетность:

а) если $n = 2k$, функция $y = x^n$ четная и график ее симметричен относительно оси ординат;

б) если $n = 2k-1$, функция нечетная и график ее симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $n = 2k$, то функция $y = x^{2k}$ при $-\infty < x < 0$ убывает, а при $0 < x < +\infty$ возрастает;

б) если $n = 2k-1$, то функция $y = x^{2k-1}$ везде возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $n = 2k$, то наименьшее значение $y = 0$ функция $y = x^{2k}$ принимает при $x = 0$, а наибольшего не имеет;

б) если $n = 2k-1$, то функция $y = x^{2k-1}$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения; функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $n = 2k$, то график функции $y = x^{2k}$ везде вогнутый (рис. 5.1*а*);

б) если $n = 2k+1$, то график функции $y = x^{2k+1}$ выпуклый при $-\infty < x < 0$ и вогнутый при $0 < x < +\infty$ (рис. 5.1*б*) (при $n = 1$ функция имеет вид $y = x$, а ее график есть прямая линия). Точка $(0;0)$ отделяет выпуклую часть графика от вогнутой и называется точкой перегиба.

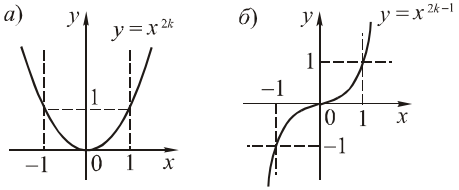


Рис. 5.1

Заметим, что на интервале $(-1;1)$ для функции $y = x^n$ выполняется неравенство $|y| < |x|$, а на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ – неравенство $|y| > |x|$.

Если $x = \pm 1$, то $|y| = |x| = 1$.

На рисунках 5.2 *а* и *б* изображены графики степенной функции $y = x^n$ соответственно при четных и нечетных значениях n.

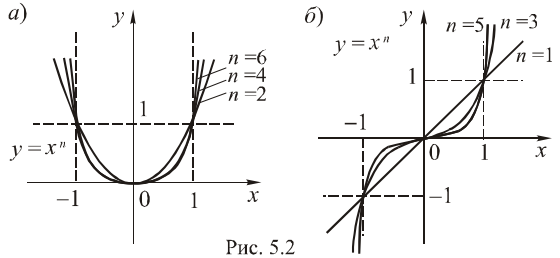


Рис. 5.2

На графиках (рис. 5.3) штриховкой показаны части координатной плоскости, в которых расположены соответствующие графики.

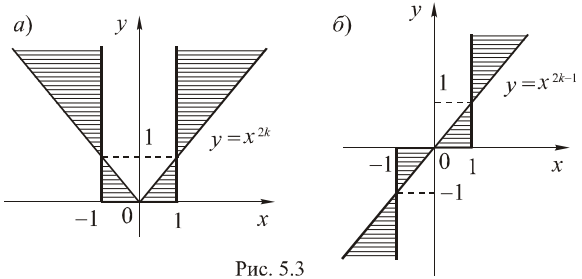


Рис. 5.3

Функции с целым отрицательным показателем вида $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

где n – натуральное число.

1. Область определения: функция $y = 1/x^n$ определена при всех действительных значениях $x \neq 0$, т.е. при $-\infty < x < 0$, $0 < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $n = 2k$, то $0 < x^{-2k} < +\infty$;

б) если $n = 2k-1$, то $-\infty < x^{-2k+1} < 0$ и $0 < x^{-2k+1} < +\infty$.

3. Нулей функция не имеет, т.е. график с осями координат не пересекается.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $n = 2k$, функция положительна;

б) если $n = 2k-1$, это функция отрицательна, если $x < 0$, и положительна, если $x > 0$.

5. Четность и нечетность:

а) если $n = 2k$, это функция четная и график ее симметричен относительно оси ординат;

б) если $n = 2k-1$, то функция нечетная и график ее симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $n = 2k$, то функция при $-\infty < x < 0$ возрастает, а при $0 < x < +\infty$ убывает;

б) если $n = 2k-1$, то функция везде убывает.

7. Наибольших и наименьших значений функция не имеет (неограниченна).

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если, то график функции везде вогнутый;

б) если $n = 2k-1$, то при $-\infty < x < 0$ график функции выпуклый, а при $0 < x < +\infty$ – вогнутый.

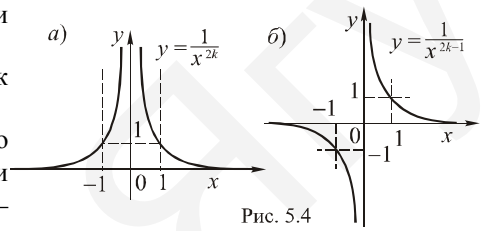


Рис. 5.4

На рисунках 5.4 *а*, *б* изображены графики степенной функции соответственно с целым четным и нечетным отрицательными показателями.

На графиках (рис. 5.5.) штриховкой показаны части координатой плоскости, в которых расположены соответствующие графики.

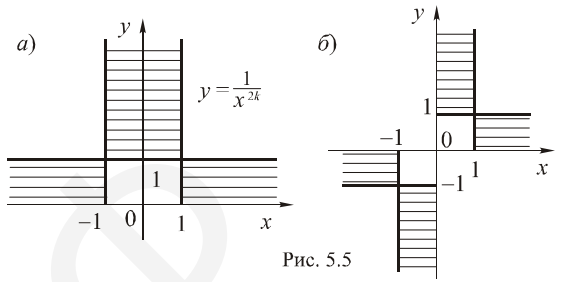


Рис. 5.5

Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$

где n – натуральное число.

1. Область определения:

а) если $n = 2k$, то функция $\sqrt[2k]{x}$ определена при $x \geq 0$, т.е. при $0 \leq x > +\infty$;

б) если $n = 2k+1$, то функция $\sqrt[2k+1]{x}$ определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $n = 2k$, то $0 \leq \sqrt[2k]{x}$;

б) если $n = 2k+1$, то $-\infty < \sqrt[2k+1]{x} < +\infty$.

3. Нули функции: функция обращается в ноль при $x = 0$, т.е. ее график проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $n = 2k$, то функция положительна при $x > 0$;

б) если $2k+1$, то функция при $x > 0$ положительна, а при $x < 0$ отрицательна.

5. Четность и нечетность:

а) если $n = 2k$, то функция при $x < 0$ не определена, т.е. ни четная, ни нечетная;

б) если $n = 2k+1$ функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания: функция в области определения везде возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $n = 2k$, то наименьшее значение функции равно нулю, а наибольшего нет;

б) если $n = 2k+1$, то функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения; функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $n = 2k$, то график функции везде выпуклый;

б) если $n = 2k+1$, то график функции при $-\infty < x < 0$ вогнутый, а при $0 < x < +\infty$ выпуклый; точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

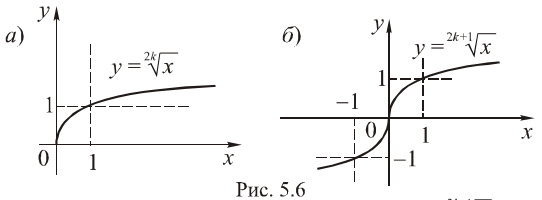


Рис. 5.6

На рисунках 5.6 *а, б* изображены графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ соответственно для четного и нечетного значений n.

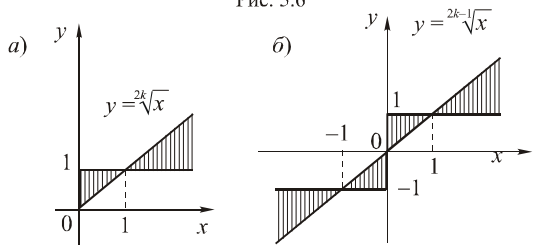


Рис. 5.7

На графиках (рис. 5.7) штриховкой показаны части координатной плоскости, в которых расположены соответствующие графики.

Функции $y = x^{2k}\,(x \ge 0)$ и $y = \sqrt[2k]{x}$, а также $y = x^{2k+1}$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$ взаимно обратны и их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

О п р е д е л е н и е. **Для неотрицательных** x $(x \ge 0)$ определена **степенная функция**

$\boxed{y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$, где $n \in N$ (свойства см. выше).

Замечание. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y = x^n$ (при четных n для $x \ge 0$).

Функции вида $\boxed{y = \sqrt[n]{x^m}}$

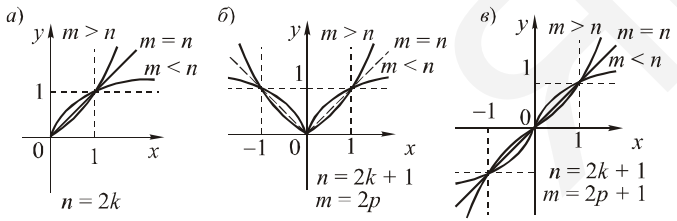


Рис. 5.8

где m и n – взаимно простые натуральные числа (композиция $y = x^m$ и $y = \sqrt[n]{x}$) (рис. 5.8).

1. Область определения:

а) если $n = 2k$, то функция определена при $0 \le x < +\infty$;

б) если $n = 2k+1$, то функция определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $n = 2k$, то $0 \le y < +\infty$;

б) если $n = 2k+1$, то при $m = 2p$ (p – натуральное число) $0 \le y < +\infty$, а при $m = 2p+1$ $-\infty < y < +\infty$.

3. Нули функции: функция обращается в ноль при $x = 0$, т.е. ее график проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $n = 2k$, то функция положительна при $x > 0$;

б) если $n = 2k-1$, а $m = 2p$, то функция положительна при $x \ne 0$;

в) если $n = 2k-1$ и $m = 2p-1$, то функция при $x < 0$ отрицательна, а при $x > 0$ положительна.

5. Четность и нечетность:

а) если $n = 2k$, то функция при $x < 0$ не определена, т.е. ни четная, ни нечетная;

б) если $n = 2k-1$, а $m = 2p$, то функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат;

в) если $n = 2k-1$, а $m = 2p-1$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $n = 2k$ или $n = 2k-1$ и $m = 2p-1$, то функция возрастает при $0 \le x < +\infty$ или $-\infty < x < +\infty$ соответственно;

б) если $n = 2k-1$, а $m = 2p$ то при $x < 0$ функция убывает, а при $x > 0$ возрастает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $n = 2k$, то функция при $x = 0$ принимает наименьшее значение $y = 0$;

б) если $n = 2k-1$, а $m = 2p$, то при $x = 0$ функция принимает наименьшее значение $y = 0$;

в) если $n = 2k-1$ и $m = 2p-1$, то функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения; функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $n = 2k$ и $m < n$, то график функции выпуклый для $x \ge 0$, а при $m > n$ – вогнутый для $x > 0$;

б) если $n=2k-1$, а $m=2p$, то при $m<n$ график функции выпуклый для $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$, а при $m>n$ – вогнутый для $-\infty<x<+\infty$;

в) если $n=2k-1$ и $m=2p-1$, то при $m<n$ график функции вогнутый для $x<0$ и выпуклый для $x>0$, а при $m>n$ – выпуклый для $x<0$ и вогнутый для $x>0$; точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

На рисунках изображены графики функции $y=\sqrt[n]{x^m}$ для различных значений натуральных чисел m и n.

Определение. **Для неотрицательных** $x\,(x\geq 0)$ определена **степенная функция** с положительным рациональным показателем

$$x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p},$$ где $p\in N$, $q\in N$ (свойства см. выше).

Функции с отрицательным рациональным показателем вида $y=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$

где m и n – взаимно простые натуральные числа (композиция $y=x^{-m}$ и $y=\sqrt[n]{x}$) (рис. 5.9).

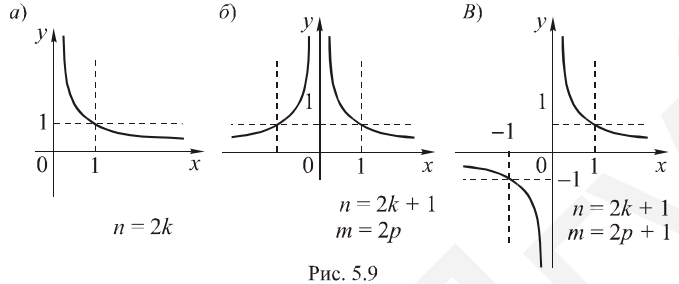


Рис. 5.9

1. Область определения:

а) если $n=2k$, то функция определена при $x>0$, т.е. при $0<x<+\infty$;

б) если $n=2k-1$, то функция определена при $x\neq 0$, т.е. при $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$.

2. Область изменения:

а) если $n=2k$, то $0<y<+\infty$;

б) если $n=2k-1$, а $m=2p$, то $0<y<+\infty$;

в) если $n=2k-1$, а $m=2p-1$, то $-\infty<y<0$ и $0<y<+\infty$.

3. Нулей функция не имеет, т.е. ее график с осями координат не пересекается.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $n=2k$, то функция положительна при $0<x<+\infty$;

б) если $n=2k-1$, а $m=2p$, то функция положительна при $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$;

в) если $n=2k-1$, а $m=2p-1$, то функция отрицательна при $x<0$ и положительна при $x>0$.

5. Четность и нечетность:

а) если $n=2k$, то функция общего вида;

б) если $n=2k-1$, то $m=2p$ функция четная;

в) если $n=2k-1$ и $m=2p-1$, то функция нечетная.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $n=2k$, то функция везде убывает;

б) если $n=2k-1$, а $m=2p$, то функция возрастает при $x<0$ и убывает при $x>0$;

в) если $n=2k-1$ и $m=2k-1$, то функция везде убывает.

7. Наибольшее и наименьшее значения: при любых значениях m и n функция наибольших и наименьших значений не имеет; функция неограниченная.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $n=2k$, то график функции везде вогнутый;

б) если $n=2k-1$, а $m=2p$, то график функции везде вогнутый;

в) если $n=2k-1$ и $m=2p-1$, то график функции при $x<0$ выпуклый, а при $x>0$ вогнутый.

Ниже изображены графики функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ для различных значений натуральных чисел m и n.

Определение. **Для положительных** $x\,(x\geq 0)$ определена **степенная функция** с отрицательным рациональным показателем

$$x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}},$$ где $p\in N$, $q\in N$ (свойства см. выше).

Замечание. Для $x>0$ определена степенная функция $y=x^0\equiv 1$.

Степенная функция с иррациональным показателем здесь не рассматривается.

Глава 6. ПРЯМО ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Прямо пропорциональная зависимость

Пропорциональной (прямо пропорциональной) зависимостью называется такая зависимость между двумя скалярными или переменными величинами, при которой их отношение остается постоянным. Эта постоянная называется *коэффициентом пропорциональности.*

Прямо пропорциональная зависимость является простейшим видом функциональной зависимости между переменными x и y, которая задается формулой $y = kx$, где $k \neq 0$ – коэффициент пропорциональности.

График функции $y = kx$ есть прямая линия, проходящая через начало координат и наклоненная к оси Ox под углом α (рис. 6.1 *а*), причем коэффициент пропорциональности равен тангенсу угла, образуемого прямой с положительным направлением оси абсцисс, т.е. $k = \operatorname{tg}\alpha$. Коэффициент пропорциональности называют также *угловым коэффициентом.*

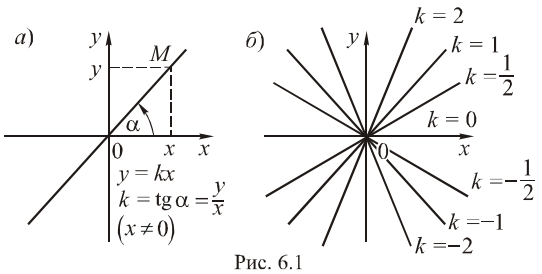


Рис. 6.1

На рис. 6.1 *б* приведены графики зависимости $y = kx$ для различных значений k:

при $k > 0$ переменные x и y имеют одинаковые знаки и график расположен в первом и третьем квадрантах;

при $k < 0$ переменные x и y имеют разные знаки и график расположен во втором и четвертом квадрантах ($x \neq 0$);

при $k = 0$ графиком будет ось абсцисс $y = 0$, а если $x = 0$, – то ось ординат.

Линейная функция и ее свойства

Функция вида

$$\boxed{y = ax + b}$$

где x – независимая переменная, а a и b – действительные числа, называется **линейной функцией** (рис. 6.2).

Основные свойства линейной функции:

1. Область определения: функция определена при всех действительных значениях x, т.е. $x \in R$.

2. Область изменения: функция принимает все действительные значения, т.е. $-\infty < y < +\infty$.

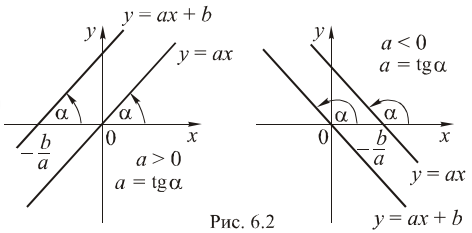


Рис. 6.2

3. Нули функции: функция обращается в ноль при $x = -b/a \quad (a \neq 0)$, т.е. ее график пересекается с осью абсцисс в точке $(-b/a; 0)$.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $a > 0$, то функция при $-\infty < x < -b/a$ отрицательна, а при $-b/a < x < +\infty$ положительна;

б) если $a < 0$, то функция при $-\infty < x < -b/a$ положительна, а при $-b/a < x < +\infty$ отрицательна.

5. Четность и нечетность: в общем случае $(a \neq 0, b \neq 0)$ функция общего вида.

6. Интервалы возрастания и убывания функции:

а) если $a > 0$, то функция везде возрастает;

б) если $a < 0$ – везде убывает;

в) если $a = 0$, функция постоянная.

7. Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет при $a \neq 0$.

8. График функции $y = ax + b$ есть *прямая линия, которая проходит через точку оси ординат* $(0; b)$ *и наклонена к оси абсцисс под углом* α, *тангенс которого равен* a.

Если $b = 0$, то функция принимает вид $y = ax$ и ее график проходит через начало координат;

если $a = 0$, то график функции расположен параллельно оси абсцисс.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k, \text{ т.е. } y = y_0 + k(x - x_0).$$

Глава 7. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Функция, выраженная в виде полинома (многочлена) второй степени, называется **квадратичной функцией**. Квадратичная функция одной переменной имеет вид

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

Рассмотрим основные свойства квадратичной функции.

Функции вида $\boxed{y = ax^2}$

1. Область определения: функция определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $a > 0$, то $0 \le y < +\infty$;

б) если $a < 0$, то $-\infty < y \le 0$.

3. Нули функции: функция обращается в ноль при $x = 0$ и ее график проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства: при $a > 0$ и $x \neq 0$, то функция положительна, а при $a < 0$ и $x \neq 0$ – отрицательна.

5. Четность и нечетность: функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

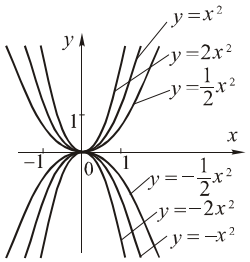


Рис. 7.1

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $a > 0$, то функция при $-\infty < x \le 0$ убывает, а при $0 \le x < +\infty$ возрастает;

б) если $a < 0$, то функция при $-\infty < x \le 0$ возрастает, а при $0 \le x < +\infty$ убывает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $a > 0$, то функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$, а наибольшего не имеет;

б) если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение $y = 0$ при $x = 0$, а наименьшего не имеет.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $a > 0$, то график функции везде вогнутый;

б) если $a < 0$, – то везде выпуклый (рис. 7.1).

График квадратичной функции представляет собой кривую, называемую **параболой**.

Функции вида $\boxed{y = ax^2 + c}$

1. Область определения: функция определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $a > 0$, то $c \le y < +\infty$;

б) если $a < 0$, то $-\infty < y \le c$.

3. Нули функции:

а) если $a > 0$ и $c > 0$, то функция не обращается в ноль;

б) если $a > 0$ и $c < 0$, то функция обращается в ноль при $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и ее график пересекает ось абсцисс в двух точках;

в) если $a < 0$ и $c < 0$, то функция не обращается в ноль;

г) если $a < 0$ и $c > 0$, то функция обращается в ноль при $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и ее график пересекает ось абсцисс в двух точках.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $a > 0$ и $c > 0$, то функция положительна;

б) если $a > 0$ и $c < 0$, то функция при $-\infty < x < -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < +\infty$ положительна, а при $-\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < \sqrt{-\frac{c}{a}}$ – отрицательна;

в) если $a < 0$ и $c < 0$, то функция отрицательна;

г) если $a < 0$ и $x > 0$, то функция при $-\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < \sqrt{-\frac{c}{a}}$ – положительна, а при $-\infty < x < -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < +\infty$ – отрицательна.

5. Четность и нечетность: функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $a > 0$, то функция при $-\infty < x \le 0$ убывает, а при $0 \le x < +\infty$ возрастает;

б) если $a < 0$, то функция при $-\infty < x \le 0$ возрастает, а при $0 \le x < +\infty$ убывает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $a > 0$, то функция имеет наименьшее значение $y = c$ при $x = 0$, а наибольшего не имеет;

б) если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение $y = c$ при $x = 0$, а наименьшего не имеет.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $a > 0$, то график функции везде вогнутый;

б) если $a < 0$ – везде выпуклый. Точка $(0; c)$ называется *вершиной параболы*.

При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз, а при $a < 0$ – вершиной вверх.

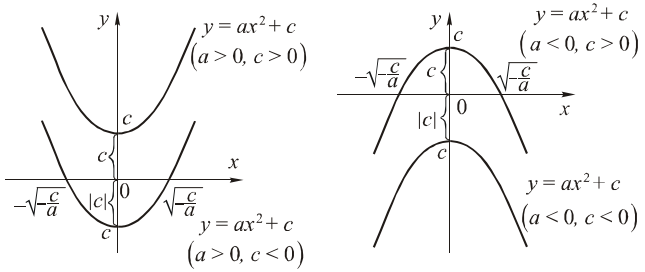


Рис. 7.2

Функции вида $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения: функция определена при всех действительных значениях x, т.е. при $-\infty < x < +\infty$.

2. Область изменения:

а) если $a > 0$, то $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \le y < +\infty$;

б) если $a < 0$, то $-\infty < y \le -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

3. Нули функции:

а) если $b^2 - 4ac < 0$, то функция в ноль не обращается;

б) если $b^2 - 4ac = 0$, то функция обращается в ноль при $x = -b/2a$, т.е. ее график касается оси абсцисс в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}; 0\right)$;

в) если $b^2 - 4ac > 0$, то функция обращается в ноль дважды: при $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то функция при всех значениях x положительна (рис. 7.3*а*);

б) если $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0$, то функция положительна при $x \ne -\dfrac{b}{2a}$ и ее график касается оси абсцисс в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}; 0\right)$ (в этом случае квадратный трехчлен есть полный квадрат) (рис. 7.3*б*);

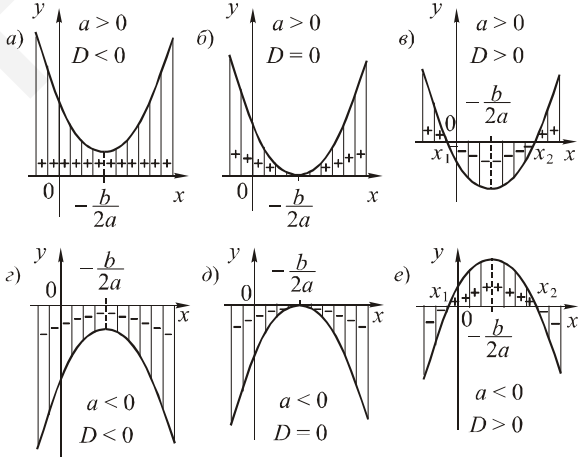


Рис. 7.3

в) если $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то функция при $-\infty < x < x_1$, и $x_2 < x < +\infty$ положительна, а при $x_1 < x < x_2$ отрицательна (рис. 7.3*в*);

г) если $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то функция при всех значениях x отрицательна (см. рис. 7.3*г*);

д) если $a < 0$ и $b^2 - 4ac = 0$, то функция при всех $x \ne -\dfrac{b}{2a}$ отрицательна (рис. 7.3*д*);

е) если $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то функция при $x_1 < x < x_2$ положительна, а при $-\infty < x < x_1$ и $x_2 < x < x + \infty$ отрицательна (рис. 7.3*е*).

Таким образом, для функции $y = ax^2 + bx + c$ можно сделать следующие в ы в о д ы:

если $D = b^2 - 4ac < 0$, то квадратный трехчлен при всех значениях x имеет знак первого коэффициента;

если $D = b^2 - 4ac = 0$, то квадратный трехчлен имеет знак первого коэффициента при $x \neq -b/2a$ и обращается в ноль при $x = -b/2a$;

если $D = b^2 - 4ac > 0$, то квадратный трехчлен имеет знак первого коэффициента вне промежутка корней и знак, противоположный знаку этого коэффициента, на промежутке между корнями;

если трехчлен имеет действительные корни x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, то при $x_1 < x < x_2$ выполняется неравенство $ay < 0$, а при $x < x_1$ и $x > x_2$ – неравенство $ay > 0$.

5. Четность и нечетность:

а) если $b \neq 0$, то функция общего вида;

б) если $b = 0$ – четная.

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $a > 0$, то функция при $-\infty < x \le -b/2a$ убывает, а при $-b/2a \le x < +\infty$ – возрастает;

б) если $a < 0$, то функция при $-\infty < x \le -b/2a$ возрастает, а при $-b/2a \le x < +\infty$ убывает.

7. Наибольшее и наименьшее значения:

а) если $a > 0$, то функция имеет наименьшее значение $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$, а наибольшего не имеет;

б) если $a < 0$, то функция имеет наибольшее значение $y = \dfrac{4ac - b^2}{2a}$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$, а наименьшего не имеет.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика:

а) если $a > 0$, то график функции везде вогнутый;

б) если $a < 0$ – везде выпуклый.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола с вершиной в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

П р и м е р ы

1. ***При каких значениях*** m ***неравенство*** $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 < 0$ ***справедливо при всех действительных значениях*** x ***?***

□ Если $m = -1$, то неравенство принимает вид $4x - 6 < 0$ и, очевидно, выполняется не при всех x. Пусть теперь $m \neq -1$. Графиком квадратного трехчлена является парабола; по условию задачи ее ветви направлены вниз и корней нет.

В ы в о д. Квадратный трехчлен отрицателен при всех значениях x, если $a < 0$ и $D < 0$, т.е.

$$\begin{cases} m + 1 > 0, \\ 4(m-1)^2 - 4(m+1)(3m-3) < 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m < -1, \\ m^2 + m - 2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $m < -2$.

2. ***При каких значениях*** m ***трехчлен*** $(m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$ ***представляет собой полный квадрат?***

□ Квадратный трехчлен будет полным квадратом, если $a > 0$ и $D = 0$, т.е.

$$\begin{cases} m - 1 > 0, \\ 4m^2 - 4(m-1)(3m-2) = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m > 1, \\ 2m^2 - 5m + 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} m > 1, \\ m = 1/2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} m > 1, \\ m = 2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а из второй получаем $m = 8$.

3. ***Вершина параболы*** $y = ax^2 + bx + c$ ***имеет координаты*** $x = 6$, $y = -12$. ***Зная, что парабола вогнута и имеет один из нулей при*** $x = 8$, ***найти коэффициенты*** a, b ***и*** c.

□ Парабола вогнута, значит, $a > 0$. Вершина параболы находится в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, т.е. $-\dfrac{b}{2a} = 6$, $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = -12$ и $x = 8$ – нуль квадратного трехчлена, значит, $a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$. Поэтому решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 6, \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -12, \\ 64a + 8b + c = 0. \end{cases}$$

Решив систему при условии $a > 0$, найдем: $a = 3$, $b = -36$, $c = 96$.

ЯГУБОВ.РФ

4. ***При каких значениях*** k ***неравенство*** $\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}<3$ ***справедливо при всех значениях*** x ***?***

□ Так как $x^2+x+1>0$ при всех $x\in R$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2-kx+1<3(x^2+x+1)$, или $2x^2+(k+3)x+2>0$.

Трехчлен в левой части данного неравенства при всех значениях x положителен, если $D=(k+3)^2-16<0$, или $-4<k+3<4$, т.е. $-7<k<1$.

5. ***Найти значения*** m ***, для которых справедливо неравенство*** $x^2+mx+m^2+6m<0$ ***при*** $1<x<2$ ***(при остальных*** x ***трехчлен может принимать любые значения).***

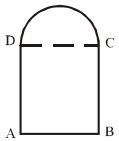
□ Так как коэффициент при x^2 равен $1>0$, то трехчлен x^2+mx+m^2+6m принимает отрицательные значения между корнями, которые должны быть действительными и находиться вне интервала $(1;\ 2)$, т.е. при $x=1$ и $x=2$ трехчлен должен быть не положительным. Поэтому m должно удовлетворять системе неравенств[*)]

$$\begin{cases} f(1)=1+m+m^2+6m\le 0 \\ f(2)=4+2m+m^2+6m\le 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} m^2+7m+1\le 0 \\ m^2+8m+4\le 0 \end{cases}.$$

Решив систему, найдем: $-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\le m\le 2\sqrt{3}-4$.

6. ***Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (нормандское окно). Каковы должны быть размеры окна, чтобы при его периметре*** $2p$ ***окно пропускало наибольшее количество света?***

□. Окно будет пропускать наибольшее количество света, когда его площадь будет наибольшей. Обозначим ширину окна $AB=2x$, а высоту до полукруга $AD=y$; тогда его площадь



$$S=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2,$$

где $2x+2y+\pi x=2p$ (по условию).

Из последнего равенства найдем $y=p-x-\dfrac{\pi}{2}x$. Подставив значение y в формулу для площади, получим

[*)] Подробнее см. Е.М. Родионов, Л.А. Филимонов. Математика. Ч. I. Уравнения, неравенства. Параметры. Тригонометрия. Логарифмы. М.: Ориентир, 2003.

$$S=2x\left(p-x-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{2}\pi x^2, \text{ или } S=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2+2px,$$

т.е. площадь численно равна квадратному трехчлену с коэффициентами $a=-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $b=2p$ и $c=0$.

Поскольку $a<0$, то трехчлен при $x=-\dfrac{b}{2a}$ принимает наибольшее значение. Следовательно,

$$x=\frac{2p}{2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2p}{4+\pi}; \qquad y=p-\frac{2p}{4+\pi}-\frac{\pi}{2}\frac{2p}{4+\pi}=\frac{2p}{4+\pi}.$$

Таким образом, ширина окна равна $\dfrac{4p}{4+\pi}$, а высота до полукруга равна $\dfrac{2p}{4+\pi}$.

Ягубов.рф

Глава 8. ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Обратно пропорциональная зависимость и ее свойства

Обратно пропорциональной зависимостью называется такая зависимость между двумя скалярными или переменными величинами, при которой их произведение остается постоянным. Эту постоянную и называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Обратно пропорциональную зависимость как простейшую функциональную зависимость между переменными x и y можно представить в виде

$$\boxed{xy = k \text{ или } y = \frac{k}{x}}$$

где $k \neq 0$ – коэффициент обратной пропорциональности.

Рассмотрим основные свойства обратно пропорциональной зависимости вида $y = \frac{k}{x}$.

1. Область определения: функция определена при $x \neq 0$.

2. Область изменения: функция принимает следующие значения: $-\infty < y < 0$ и $0 < y < +\infty$.

3. Нули функции: функция в ноль не обращается, т.е. ее график с осью абсцисс не пересекается.

4. Интервалы знакопостоянства:

а) если $k > 0$, то функция при $x > 0$ положительна, а при $x < 0$ отрицательна;

б) если $k < 0$, то функция при $x < 0$ положительна, а при $x > 0$ отрицательна.

5. Четность и нечетность: функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Интервалы возрастания и убывания: при $k > 0$ функция убывает на каждом из промежутков $x<0$, $x>0$, при $k < 0$ – возрастает на каждом из промежутков $x<0$, $x>0$.

7. Наименьшего и набольшего значений функция не имеет.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика (рис. 8.1):

а) если $k > 0$, то график при $-\infty < x < 0$ выпуклый, а при $0 < x < +\infty$ вогнутый;

б) если $k < 0$, то график при $-\infty < x < 0$ вогнутый, а при $0 < y < +\infty$ выпуклый.

Выше изображен график функции $y = \frac{k}{x}$ для различных значений k. График этой функции называют **гиперболой**, а точку $O(0;0)$ – *центром гиперболы*.

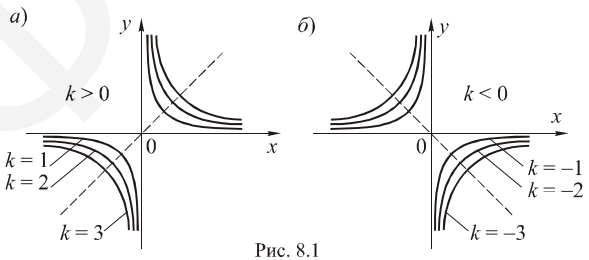


Рис. 8.1

Дробно-линейная функция и ее свойства

Дробно-линейной функцией одной переменной называется функция вида

$$\boxed{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$$

где a, b, c, d – постоянные, $c \neq 0$, $ad \neq bc$.

Если $a = 0$ и $d = 0$, то дробно-линейная функция принимает вид

$$y = \frac{b}{cx} = \frac{\frac{b}{c}}{x}.$$

Если обозначить $\frac{b}{c} = k$, то получим $y = \frac{k}{x}$, т.е. обратно пропорциональную зависимость.

Замечания:

1. Если $c = 0$, то дробно-линейная функция принимает вид

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}.$$

Если обозначить $\frac{a}{d} = k$, $\frac{b}{d} = b_1$, то получим $y = kx + b_1$, т.е. линейную функцию.

2. Если $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ или $ad=bc$, то, обозначив $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=p$, получим $a=cp$, $b=dp$ и

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{p(cx+d)}{cx+d}=p \ \ (\text{при } cx+d\neq 0),$$

т.е. функцию постоянную, принимающую значение p при всех значениях аргумента x, кроме $x=-\frac{d}{c}$.

Поэтому принято рассматривать дробно-линейную функцию при $c\neq 0$ и $ad\neq bc$. Эта функция определена в области

$$D=R\setminus\left\{x=-\frac{d}{c}\right\}.$$

Представим ее в виде

$$y=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+\frac{bc}{a}\right)}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d+\frac{bc}{a}-d\right)}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$$

$$\text{или}\quad y-\frac{a}{c}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Если обозначить $y-\frac{a}{c}=Y$, $x+\frac{d}{c}=X$ и $\frac{bc-ad}{c^2}=k$, то дробно-линейная функция сводится к обратно пропорциональной зависимости

$$Y=\frac{k}{X}.$$

Рассмотрим основные свойства дробно-линейной функции вида

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Для удобства будем пользоваться обозначением $k=\frac{bc-ad}{c^2}$.

1. Область определения: функция определена при $x\neq -\frac{d}{c}$, т.е. при $-\infty<x<-\frac{d}{c}$ и $-\frac{d}{c}<x<+\infty$.

2. Область изменения: функция принимает значения $-\infty<y<\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{c}<y<+\infty$.

3. Нули функции: функция обращается в ноль при $x=-\frac{b}{a}(a\neq 0)$.

4. Интервалы знакопостоянства:

если $k>0$, то:

а) при $\frac{a}{c}>0$ функция при $-\infty<x<-\frac{b}{a}$ и $-\frac{d}{c}<x<+\infty$ положительна, а при $-\frac{b}{a}<x<-\frac{d}{c}$ отрицательна;

б) при $a=0$ функция при $-\infty<x<-\frac{d}{c}$ отрицательна, а при $-\frac{d}{c}<x<+\infty$ положительна;

в) при $\frac{a}{c}<0$ функция при $-\infty<x<-\frac{d}{c}$ и $-\frac{b}{a}<x<+\infty$ отрицательна, а при $-\frac{d}{c}<x<-\frac{b}{a}$ положительна;

если $k<0$, то:

а) при $\frac{a}{c}>0$ функция при $-\infty<x<-\frac{d}{c}$ и $-\frac{b}{a}<x<+\infty$ положительна, а при $-\frac{d}{c}<x<-\frac{b}{a}$ отрицательна;

б) при $a=0$ функция при $-\infty<x<-\frac{d}{c}$ положительна, а при $-\frac{d}{c}<x<+\infty$ отрицательна;

в) при $\frac{a}{c}<0$ функция при $-\infty<x<-\frac{b}{a}$ и $-\frac{d}{c}<x<+\infty$ отрицательна, а при $-\frac{b}{a}<x<\frac{d}{c}$ положительна.

5. Четность и нечетность: функция общего вида.

ЯГУБОВ.РФ

6. Интервалы возрастания и убывания:

а) если $k > 0$, то функция убывает на каждом из интервалов $x<-\frac{d}{c}$, $x>-\frac{d}{c}$;

б) если $k < 0$ – возрастает на каждом из интервалов $x>-\frac{d}{c}$, $x>-\frac{d}{c}$.

7. Наибольшего и наименьшего значений функция не имеет.

8. Интервалы выпуклости и вогнутости графика (рис. 8.2):

а) если $k > 0$, то график при $-\infty < x < -\frac{d}{c}$ выпуклый, а при $-\frac{d}{c} < x < +\infty$ вогнутый;

б) если $k < 0$, то график при $-\infty < x < -\frac{d}{c}$ вогнутый, а при $-\frac{d}{c} < x < +\infty$ выпуклый.

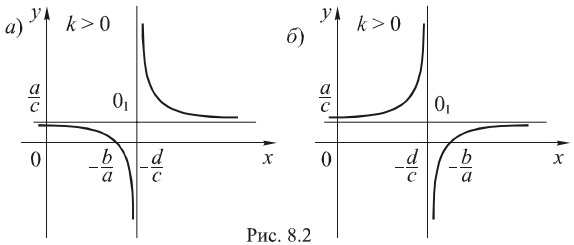


Рис. 8.2

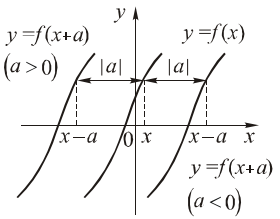
График функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ при $c \neq 0$ и $ad \neq bc$ есть гипербола с центром в точке $O_1\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.

Глава 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Построение графиков функций по известным графикам каких-либо данных функций

Пусть дан график функции $y = f(x)$.

1) Чтобы построить график функции $y = f(x+a)$, где a – некоторое данное число, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести параллельно в направлении оси Ox на расстояние $|a|$ в положительном направлении, если $a < 0$, и в отрицательном направлении, если $a > 0$.



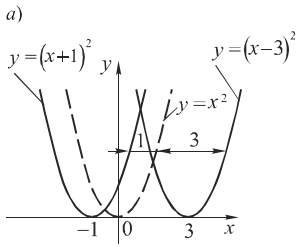
Примеры

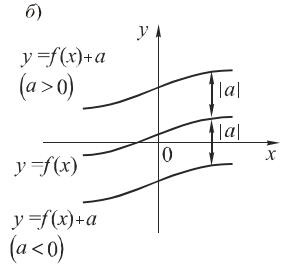
Построить графики функций:

1. $y=(x-3)^2$ *и* $y=(x+1)^2$.

□ Строим график $y=x^2$ (пунктиром). Переносим его дважды: в положительном направлении оси Ox на расстояние, равное 3, и получаем график $y=(x-3)^2$; в отрицательном направлении оси Ox на расстояние, равное 1, и получаем график $y=(x+1)^2$ (см. рис. *а*).

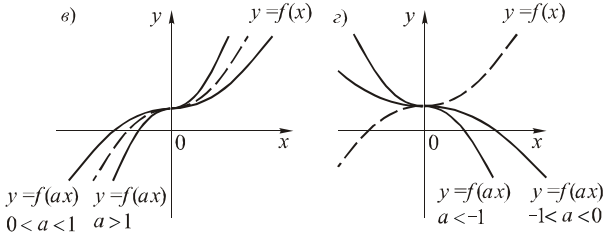
2) Чтобы построить график функции $y = f(x) + a$, где a – некоторое данное число, достаточно график функции $f(x)$ перенести параллельно оси Oy на расстояние $|a|$ в положительном направлении, если $a > 0$, и в отрицательном, если $a < 0$ (см. рис. *б*).





3) Чтобы построить график функции $y = f(ax)$, где a – некоторое положительное число, достаточно график функции $y = f(x)$ равномерно сжать (растянуть) к оси Oy в a раз; если $a > 1$, то происходит сжатие, а если $0 < a < 1$, то происходит растяжение (см. рис. *в*).

ЯгуОВ.РФ



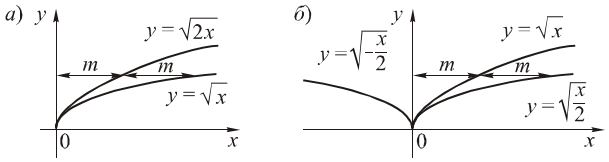
Это означает, что абсциссы всех точек графика функции достаточно уменьшить в a раз, если $a>1$, или увеличить в $1/a$ раз, если $0<a<1$, а ординаты оставить без изменения.

Если $a<0$, то к указанным преобразованиям добавится еще преобразование симметрии относительно оси Oy (см. рис. *г*).

2. $y=\sqrt{2x}$ ***и*** $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

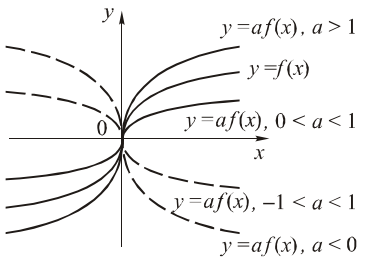
□ Построим график $y=\sqrt{x}$ (см. рис. *а*). Затем график сожмем к оси Oy в 2 раза и получим график $y=\sqrt{2x}$.

Если график $y=\sqrt{x}$ растянем по оси Oy в 2 раза, а затем симметрично отобразим полученный график относительно оси Oy (см. рис. *б*), то получим график $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.



4) Чтобы построить график функции $y=af(x)$, где a – данное положительное число, достаточно график функции $y=f(x)$ растянуть от оси Ox в a раз, причем, если $a>1$, то будет растяжение, а если $a<1$, то будет сжатие к оси Ox.

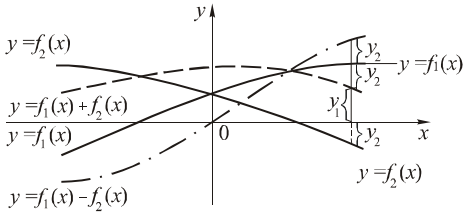
Если $a<0$, то к указанному преобразованию еще добавится преобразование симметрии относительно оси Ox.



Пользуясь преобразованиями графиков функций 1–4, можно построить график функции $y=af(bx+c)+d$, зная график функции $y=f(x)$.

(Внимание! Важен порядок преобразований!)

5) По графикам функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ можно построить графики функций $y=f_1(x)+f_2(x)$, $y=f_1(x)-f_2(x)$, $y=f_1(x)f_2(x)$, $y=f_1(x)$, т.е. над функциями, графики которых заданы, можно производить арифметические действия (см. рис.).



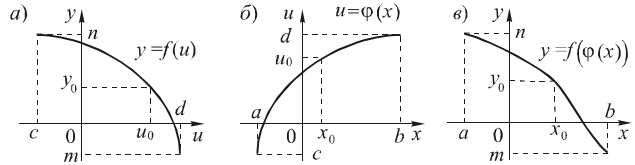
Построение графика сложной функции

Пример

3. ***Даны графики функций*** $y=f(u)$ ***и*** $u=\varphi(x)$. ***Построить график сложной функции*** $y=f(\varphi(x))$.

□ Построим график $y=f(\varphi(x))$. Возьмем значение $x=x_0$ (см. рис. *б*) и найдем $u_0=\varphi(x_0)$. Затем отложим на оси Ou (см. рис. *а*) и найдем соответствующее значение $y_0=f(u_0)$.

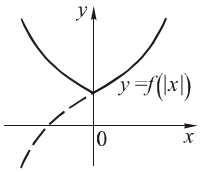
В координатной плоскости xOy построим точку $(x_0;y_0)$ графика функции $y=f(\varphi(x))$. Построив достаточное количество точек графика функции $y=f(\varphi(x))$ и соединив их, получим график сложной функции $y=f(\varphi(x))$ (см. рис. *в*).



Построение графиков функций, содержащих символ абсолютной величины числа

Задан график функции $y=f(x)$.

1) Чтобы построить график функции $y=f(|x|)$, достаточно часть графика $y=f(x)$, лежащую в правой полуплоскости $x\ge 0$, оставить без изменения, а в левой полуплоскости $x<0$ построить кривую, симметричную правой части графика $y=f(x)$ относительно оси ординат.



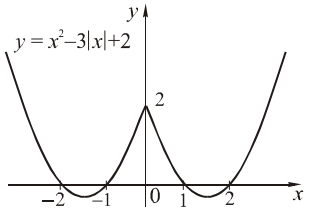
Действительно, функция $y = f(|x|)$ – четная, так как $f(|-x|) = f(|x|)$, т.е. ее график симметричен относительно оси ординат.

Так как при $x \ge 0$ $f(|x|) = f(x)$ и графики функций $y = f(|x|)$ и $y = f(x)$ совпадают, то отсюда следует указанный способ построения графика функции $f(|x|)$.

П р и м е р ы

Построить графики функций:

4. $y = x^2 - 3|x| + 2$.

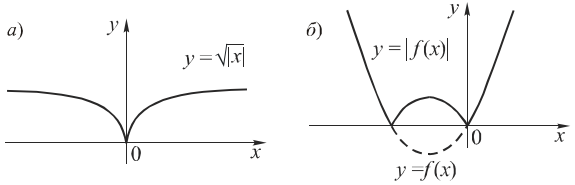


□ Строим график функции $y = x^2 - 3x + 2$ для $x \ge 0$, а затем кривую, симметричную с построенным графиком относительно оси Oy, и получаем график функции $y = x^2 - 3|x| + 2$ (следует учесть, что $x^2 = |x|^2$).

5. $y = \sqrt{|x|}$.

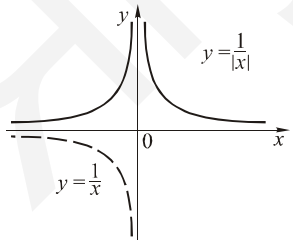
□ Строим график функции $y = \sqrt{x}$ при $x \ge 0$ и отображаем его симметрично относительно оси ординат (см. рис. *а*).

2) Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, достаточно все части графика $y = f(x)$, для которых $y \ge 0$, оставить без изменения, а те части, при которых $y < 0$, отобразить симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. *б*).

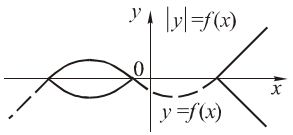


6. $y = \dfrac{1}{|x|}$.

□ Строим график $y = \dfrac{1}{x}$, а часть графика, лежащую над осью абсцисс $y \ge 0$, оставляем без изменения, и к ней достраиваем линию, симметричную относительно оси абсцисс с той частью, которая лежит под осью абсцисс ($y < 0$).

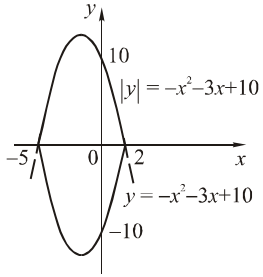


3) Чтобы построить график $|y| = f(x)$, достаточно те части графика $y = f(x)$, на которых $f(x) \ge 0$, оставить без изменения, и к ним построить кривые, симметричные с ними относительно оси абсцисс (см. рис.). Часть графика функции $y = f(x)$, где $f(x) < 0$, отбрасывается.



Заметим, что $|y| = f(x)$ – функция двузначная, если $y = f(x)$ – однозначная: $y = \pm f(x)$ при $f(x) \ge 0$. Таким образом, построен график уравнения, но не график функции в привычном понимании.

7. $|y| = -x^2 - 3x + 10$.



□ Строим график $y = -x^2 - 3x + 10$ при $-x^2 - 3x + 10 \ge 0$, или $-5 \le x \le 2$. Затем построенный график отображаем симметрично относительно оси абсцисс.

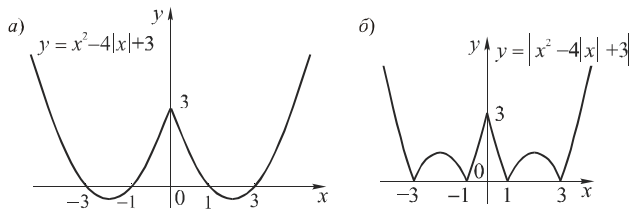
4) Чтобы построить графики функций $y = |f(|x|)|$, $|y| = |f(x)|$, $|y| = f(|x|)$, $|y| = |f(|x|)|$ достаточно последовательно применять преобразования 1, 2, 3.

8. $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

□ Строим график $y = x^2 - 4|x| + 3$ (см. рис. *а*). Затем те части графика, где $y < 0$, отображаем симметрично относительно оси Ox, и получаем искомый график (см. рис. *б*).

Заметим, что аналитические выражения (формулы) $|y| = f(x)$ не определяют однозначную функцию.

Далее подробно рассмотрены и систематизированы приемы построения графиков.



Элементарные преобразования графиков

Пусть уже построен график $y = f(x)$. Используя этот график, можно построить много новых графиков по правилам, излагаемым ниже.

1) $y = f(x-a)$: *график* $y = f(x)$ *сдвигается на* a *вдоль оси* Ox.
$x \rightsquigarrow (x-a)$ Вместо указанной процедуры можно (это способ «для ленивых», он не требует изображать тот же график еще раз) переместить ось Oy на $-a$ вдоль оси Ox. Тогда график относительно новой оси автоматически сдвинется на a.

2) $y = f(kx)$, *график* $y = f(x)$ *сжимается в* k *раз к оси* Oy.
где $k > 0$: Здесь способа «для ленивых» нет. Заметим, что
$x \rightsquigarrow kx$ при $k \in (0;1)$ формулировка «сжимается в k раз» звучит несколько странно, например, «сжать в $1/5$ раза». Это значит «растянуть от оси Oy в k раз», т.е. в 5 раз.

3) $y = f(-x)$: *график* $y = f(x)$ *отражается симметрично*
$x \rightsquigarrow (-x)$ *относительно оси* Oy (на оси ординат стоит зеркало, график преобразуется «слева направо – справа налево»).

4) $y = f(|x|)$: *график в левой полуплоскости* ($x < 0$) *стирается*
$x \rightsquigarrow |x|$ ($|x|$ не бывает отрицательным, т.е. значения исходной функции в отрицательных точках НАС НЕ ИНТЕРЕСУЮТ! От знака x ничего не зависит.), *в правой полуплоскости* ($x \ge 0$) *график сохраняется и симметрично относительно оси* Oy *отражается в левую полуплоскость, «дублируется».*

Пункты 5-8 повторяют 1-4 с точностью до замены x на y.

5) $y - b = f(x)$ *график* $y = f(x)$ *сдвигается на* b *вдоль оси* Oy
(или $y = f(x) + b$): (способ «для ленивых»: переместить ось Ox на
$y \rightsquigarrow (y-b)$ $-b$ вдоль оси Oy; график относительно новой оси автоматически сдвинется на b).

6) $y \cdot \frac{1}{k} = f(x)$ *график* $y = f(x)$ *растягивается в* k *раз от оси*
(или $y = k \cdot f(x)$), Ox. (Если $k \in (0;1)$, то сжать в $\frac{1}{k}$ раз.)
где $k > 0$: $y \rightsquigarrow \frac{1}{k} y$

7) $-y = f(x)$ *график* $y = f(x)$ *отражается симметрично*
(или $y = -f(x)$): *относительно оси* Ox («снизу вверх – сверху
$y \rightsquigarrow (-y)$ вниз»).

8) $|y| = f(x)$: *график* $y = f(x)$ *в нижней полуплоскости* ($y < 0$)
$y \rightsquigarrow |y|$ *стирается* (ведь модуль не может быть равен отрицательной величине!), *в верхней полуплоскости* ($y \ge 0$) *график сохраняется и симметрично относительно оси* Ox *«дублируется» в нижнюю полуплоскость*, т.к. знак y может быть любым. (Ведь если, например, $|y| = 5$, то $y = \pm 5$.).

Замечание. Возможно, при «навешивании» модуля на y изменилась область существования равенства, т.е. некоторым участкам оси абсцисс теперь не соответствует никакого графика!

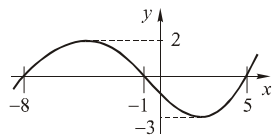
9) $y = |f(x)|$: *график* $y = f(x)$ *в верхней полуплоскости сохраняется, из нижней полуплоскости* ($y < 0$) *отражается симметрично относительно оси* Ox *в верхнюю полуплоскость* (ведь модуль не бывает отрицательным, т.е. если $f(x) < 0$, то $y = -f(x)$), ЗАТЕМ *график в нижней полуплоскости стирается* (если стереть сначала, то нечего будет отражать!).

Замечание. После завершения процедуры в нижней полуплоскости не должно остаться ничего!

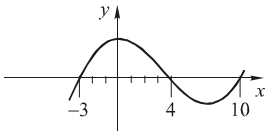
Результаты применения данных правил проиллюстрируем на примерах.

Примеры

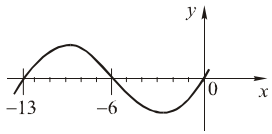
Возьмем произвольный график $y = f(x)$ и будем его преобразовывать:



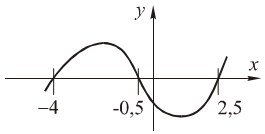
9. $y = f(x-5)$.



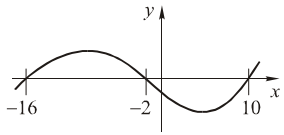
10. $y = f(x+5)$.



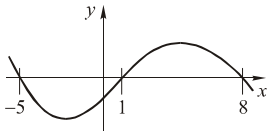
11. $y = f(2x)$.



12. $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

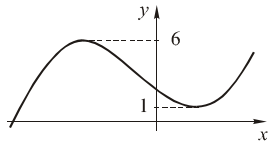


13. $y = f(-x)$.



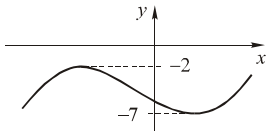
14. $y = f(x)+4$

или $y-4 = f(x)$.



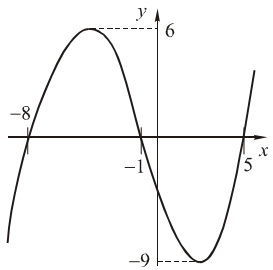
15. $y = f(x)-4$

или $y+4 = f(x)$.



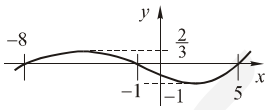
16. $y = 3 \cdot f(x)$

или $\frac{y}{3} = f(x)$.



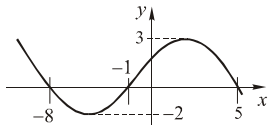
17. $y = \frac{1}{3} f(x)$

или $3y = f(x)$.

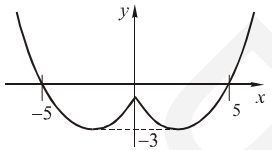


18. $y = -f(x)$

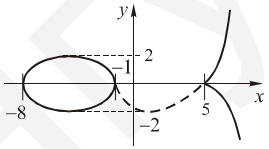
или $-y = f(x)$.



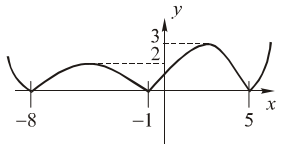
19. $y = f(|x|)$.



20. $|y| = f(x)$.



21. $y = |f(x)|$.



Комментарии.

1) Данные правила можно использовать для построения графиков не только функций, но и уравнений и неравенств!

2) Для тех, кому сложно представить себе последовательность геометрических преобразований, удобно держать в уме, например, такую модель: есть некое устройство (робот, черный ящик или др.), которое умеет делать следующие процедуры с формулами:

- везде, где в формуле встречается x, ставить $(x-a)$;
- везде, где в формуле встречается x, ставить kx $(k>0)$;
- везде, где в формуле встречается x, ставить $-x$;
- везде, где в формуле встречается x, ставить $|x|$, т.е. «навешивать модуль на x»;
- везде, где в формуле встречается y, ставить $y-b$ (или, что то же самое, заменять строку $y = f(x)$ на строку $y = f(x)+b$);
- везде, где в формуле встречается y, ставить $y \cdot \frac{1}{k}$ $(k>0)$ (или, что то же самое, заменять строку $y = f(x)$ на строку $y = k \cdot f(x)$);
- везде, где в формуле встречается y, ставить $-y$ (или, что то же самое, заменять строку $y = f(x)$ на строку $y = -f(x)$);
- везде, где в формуле встречается y, ставить $|y|$, т.е. «навешивать модуль на y»;
- заменять строку $y = f(x)$ на строку $y = |f(x)|$, т.е. «навешивать модуль на всю правую часть».

При изменении формулы наше устройство методично проводит с графиком каждый раз одну и ту же соответствующую геометрическую процедуру (см. соответствующий пункт выше)

Советы для забывчивых.

Для тех, кто всегда забывает, куда нужно двигать график, пишем простые правила:

1. Если наше устройство ставит что-то вместо x, то двигать или сжимать график нужно вдоль оси Ox (т.е. сдвигать вправо-влево, а сжимать или растягивать к (от) вертикальной оси Oy); если наше устройство ставит что-то вместо y, то двигать или сжимать график нужно вдоль оси Oy (т.е. сдвигать вверх-вниз, а сжимать или растягивать к (от) горизонтальной оси Ox);

Ягубов.ру

2. Если Вы не помните (бывает!), куда именно сдвигается график при замене, например, x на $x-a$, то посмотрите, «куда переходит 0».

Попробуем: нужно из графика $y=f(x)$ сделать график $y=f(x-3)$. Куда перешла точка 0 (точка с абсциссой 0)? Уравнение $x=0$ меняется на уравнение $x-3=0$.

Значит, точка 0 перешла в точку 3, т.е. **график** сдвинулся вправо на 3 единицы!

При построении графика $y=f(x+100)$ точка 0 переходит в точку -100, т.е. **график** $y=f(x)$ сдвигается на 100 единиц влево.

Аналогичное правило действует при замене в формуле y на $y-b$ (только сдвиг вдоль Oy).

3. Если Вы не помните (бывает!), нужно ли Вам сжимать или растягивать график при замене, например, x на kx, то посмотрите, «куда переходит 1».

Попробуем: нужно из графика $y=f(x)$ сделать график $y=f(3x)$. Куда перешла точка 1 (точка с абсциссой 1)? Уравнение $x=1$ меняется на уравнение $3x=1$. Значит, точка 1 перешла в точку $1/3$, т.е. **график** сжался к оси ординат в 3 раза!

Аналогичное правило действует при замене в формуле y на ky (только сжатие к оси Ox).

4. Выполняя сдвиги графиков, нужно не забыть, что операции сдвига графика и сдвига соответствующей оси взаимозаменяемы, т.е. ни в коем случае не следует делать и то, и другое! Если сдвинуть и ось, и график, то результат будет неверным.

5. Изображая два или более графиков в одной координатной системе, Вы только один раз можете воспользоваться способом «для ленивых», т.е. сдвинуть оси (при построении первого графика)! Далее оси жестко фиксируются. Если далее продолжать сдвигать оси, а не графики, то наверняка будут испорчены предыдущие построения!

Попробуем применить наши правила для построения графиков, соответствующих некоторым чуть более сложным (более комплексным) формулам.

Здесь и далее: для построения нужно определить порядок геометрических преобразований, т.е. записать такую последовательность изменений начальной простой формулы, которая удовлетворяет двум условиям:

- каждый раз при переходе от одной строки к следующей мы **можем** точно указать **соответствующее** геометрическое преобразование графика;
- последняя формула совпадает с данной **по условию**.

Условные обозначения

1) $y=f(a-x)$.

Порядок построения:

1. $y=f(x)$;
2. $y=f(-x)$ симметрия относительно оси Oy; $\Leftrightarrow$
3. $y=f(-(x-a))$ сдвиг на a вдоль Ox.

Заметим, что порядок определяется неоднозначно. $\overset{a}{\leftrightarrow}$

Другой вариант:

1. $y=f(x)$;
2. $y=f(x+a)$ сдвиг на $(-a)$ вдоль Ox; $\overset{-a}{\leftrightarrow}$
3. $y=f((-x)+a)$ симметрия относительно оси Oy. $\Leftrightarrow$

2) $y=f(kx+b)$.

Порядок построения:

1. $y=f(x)$;
2. $y=f(x+b)$ сдвиг на $(-b)$ вдоль Ox; $\overset{-b}{\leftrightarrow}$
3. $y=f(kx+b)$ сжатие в k раз к оси Oy. $\overset{k}{\rightarrow\leftarrow}$

Другой вариант:

1. $y=f(x)$;
2. $y=f(kx)$ сжатие в k раз к оси Oy $\overset{k}{\rightarrow\leftarrow}$
3. $y=f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$ (сдвиг на $\left(-\frac{b}{k}\right)$ вдоль Ox). $\overset{-\frac{b}{k}}{\leftrightarrow}$

Обратите внимание: при различном порядке построения сдвиг происходит на **разное** расстояние!

3) $y=f(|x-a|)$.

Порядок построения:

1. $y=f(x)$;
2. $y=f(|x|)$ удаление графика в левой полуплоскости, «дублирование» графика из правой полуплоскости; $\Leftarrow$

3. $y = f\left(|x-a|\right)$ сдвиг на a вдоль Ox. $\overset{a}{\leftrightarrow}$

Заметим, что если мы хотим сначала делать сдвиг, а потом симметрию, то симметрия потребуется не относительно оси, а относительно прямой $x = a$. (Это не укладывается в схему действий нашего «черного ящика». Но уверенные в себе люди могут применять и такой порядок!)

4) $y = f\left(|x|-a\right)$.

Порядок построения:

1. $y = f(x)$;
2. $y = f(x-a)$ сдвиг на a вдоль Ox; $\overset{a}{\leftrightarrow}$
3. $y = f\left(|x|-a\right)$ удаление графика в левой полуплоскости, «дублирование» графика из правой полуплоскости. $\Leftarrow$

Сравните для себя действия в случаях 3) и 4)!

5) $b - y = f(x)$. «Двойник» пункта 1).

Порядок построения:

1. $y = f(x)$;		1. $y = f(x)$;
2. $-y = f(x)$	$\Updownarrow$	2. $y + b = f(x)$ $\updownarrow_{-b}$
симметрия относительно оси Ox;	**или**	сдвиг на $-b$ вдоль Oy;
3. $-(y-b) = f(x)$	$\updownarrow_{b}$	3. $(-y) + b = f(x)$ $\Updownarrow$
сдвиг на b вдоль Oy.		симметрия относительно оси Ox.

6) $my + c = f(x)$. «Двойник» пункта 2).

Порядок построения:

1. $y = f(x)$;		1. $y = f(x)$;
2. $y + c = f(x)$	$\updownarrow_{-c}$	2. $my = f(x)$ $\downarrow$ $\uparrow^{m}$
сдвиг на $(-c)$ вдоль Oy;	**или**	сжатие в m раз к оси Ox;
3. $my + c = f(x)$	$\downarrow$ $\uparrow^{m}$	3. $m\left(y + \frac{c}{m}\right) = f(x)$ $\updownarrow_{-\frac{c}{m}}$
сжатие в m раз к оси Ox.		сдвиг на $\left(-\frac{c}{m}\right)$ вдоль Oy.

7) $|y-b| = f(x)$. «Двойник» пункта 3).

Порядок построения:

1. $y = f(x)$;
2. $|y| = f(x)$ удаление графика в нижней полуплоскости, «дублирование» графика из верхней полуплоскости; $\Downarrow$
3. $|y-b| = f(x)$ сдвиг на b вдоль Oy. $\updownarrow_{b}$

Заметим, что если хотим сначала делать сдвиг, а потом симметрию, то симметрия потребуется не относительно оси, а относительно прямой $y = b$. (Это не укладывается в схему действий нашего «черного ящика». Но уверенные в себе люди могут применять и такой порядок!)

8) $|y|-b = f(x)$. «Двойник» пункта 4).

Порядок построения:

1 $y = f(x)$;

2 $y - b = f(x)$ сдвиг на b вдоль Oy; $\updownarrow_{b}$

3 $|y|-b = f(x)$ удаление графика в нижней полуплоскости, «дублирование» графика из верхней полуплоскости. $\Downarrow$

Сравните для себя действия в случаях 7) и 8)!

9) $|y| = |f(x)|$.

Можно действовать по привычному порядку:

1. $y = f(x)$;
2. $y = |f(x)|$ симметрия нижней части графика относительно Ox, затем удаление графика в нижней полуплоскости; $\Uparrow$
3. $|y| = |f(x)|$ «дублирование» графика из нижней полуплоскости в верхнюю. $\Downarrow$

Однако заметим, что **значительно** удобнее воспользоваться известным равносильным переходом: $\left(|a|=|b|\right)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.\right)$, т.е. «две величины равны по модулю тогда и только тогда, когда они либо совпадают, либо противоположны».

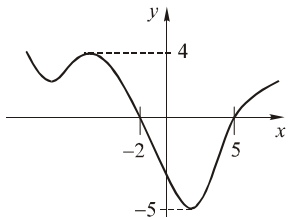
Тогда для решения задачи достаточно построить **в одной системе координат два графика**: $y=f(x)$ и $y=-f(x)$!

Проиллюстрируем все вышеизложенное на примерах.

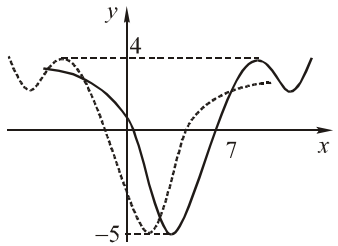
П р и м е р ы

Преобразование графика $y=f(x)$.

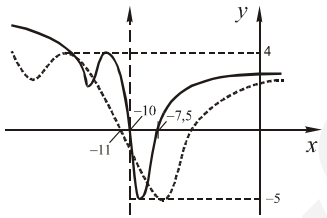
Попробуйте для каждого из них аккуратно выписать порядок построений и сверьте полученные графики с изображенными.



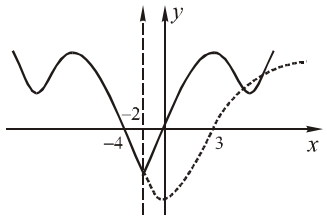
22. $y=f(5-x)$.



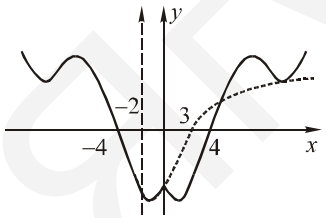
23. $y=f(2x+20)$.



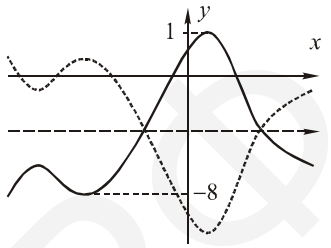
24. $y=f(-|x+2|)$.



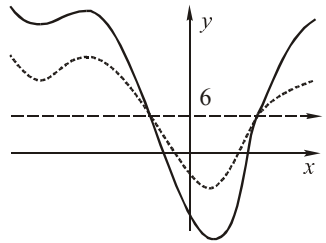
25. $y=f(-|x|+2)$.



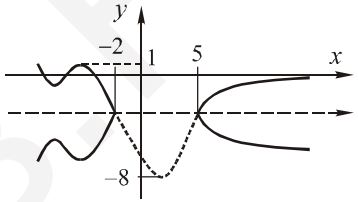
26. $-4-y=f(x)$.



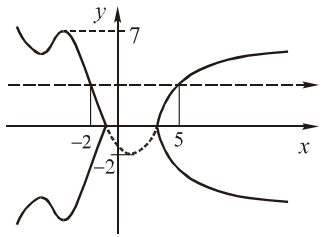
27. $\frac{y}{2}-3=f(x)$.



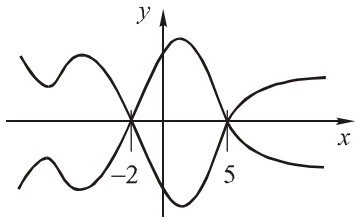
28. $|y+3|=f(x)$.



29. $|y|-3=f(x)$.

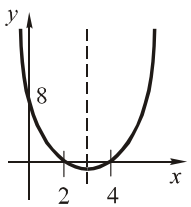


30. $|y|=|f(x)|$.

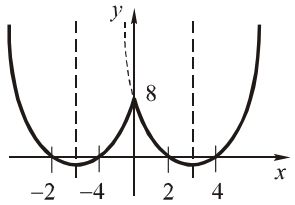


Построить графики с помощью элементарных преобразований:

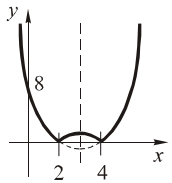
31. $y=x^2-6x+8$



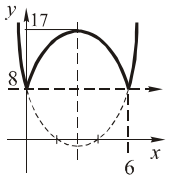
32. $y=x^2-6|x|+8$



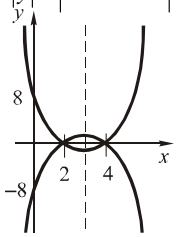
33. $y=\left|x^2-6x+8\right|$



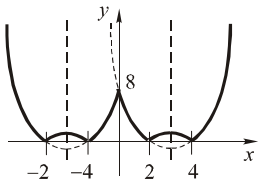
34. $y=\left|x^2-6x\right|+8$



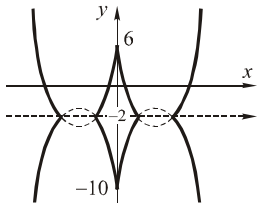
35. $\left|y\right|=\left|x^2-6x+8\right|$



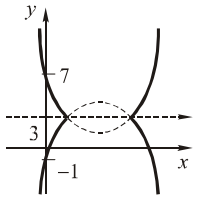
36. $y=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$



37. $\left|y+2\right|=x^2-6\left|x\right|+8$

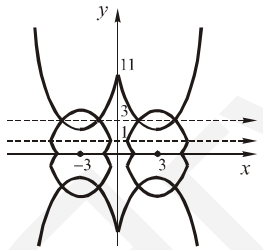


38. $\left|2y-6\right|=x^2-6x+8$



39. $\left|\left|\left|y\right|-1\right|-2\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$

1. $y=x^2-6x+8$
2. $y=x^2-6\left|x\right|+8$ $\Leftarrow$
3. $y=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\Uparrow$
4. $\left|y\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\Downarrow$
5. $\left|y-2\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\uparrow 2$
6. $\left|\left|y\right|-2\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\Downarrow$
7. $\left|\left|y-1\right|-2\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\uparrow 1$
8. $\left|\left|\left|y\right|-1\right|-2\right|=\left|x^2-6\left|x\right|+8\right|$ $\Downarrow$



или в одной системе координат строим два графика:

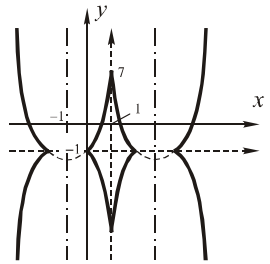
$\left|\left|y\right|-1\right|-2=x^2-6\left|x\right|+8$ и $\left|\left|y\right|-1\right|-2=-x^2+6\left|x\right|-8$;

$\left|\left|y\right|-1\right|=x^2-6\left|x\right|+10$ и $\left|\left|y\right|-1\right|=-x^2+6\left|x\right|-6$.

40. $\left|y+1\right|=x^2-4x-6\left|x-2\right|+12$

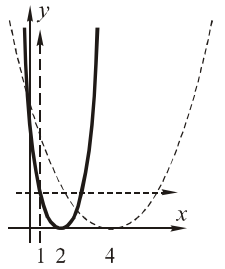
$\left|y+1\right|=\left|x-2\right|^2-6\left|x-2\right|+8$

1. $y=x^2-6x+8$
2. $\left|y\right|=x^2-6\left|x\right|+8$ $\Leftarrow, \Downarrow$
3. $\left|y+1\right|=\left(x-2\right)^2-6\left|x-2\right|+8$ $\overset{2}{\rightarrow}, \downarrow 1$



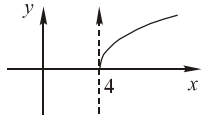
41. $\frac{y}{2}-1=\left(2x-1\right)^2-6\left(2x-1\right)+8$

1. $y=x^2-6x+8$
2. $y-1=\left(x-1\right)^2-6\left(x-1\right)+8$ $\uparrow 1, \overset{1}{\rightarrow}$
3. $\frac{y}{2}-1=\left(2x-1\right)^2-6\left(2x-1\right)+8$ $\overset{2}{\rightarrow\leftarrow}, \begin{matrix}\uparrow\\ \downarrow\end{matrix} 2$



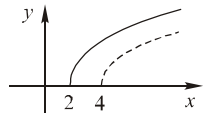
42. $y=\sqrt{x-4}$

1. $\overset{4}{\rightarrow}$



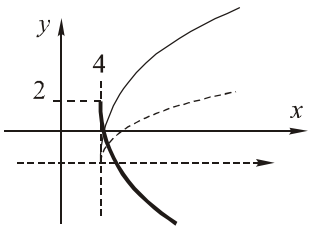
43. $y=\sqrt{2x-4}$

1. $\overset{4}{\rightarrow}$
2. $\overset{2}{\rightarrow\leftarrow}$



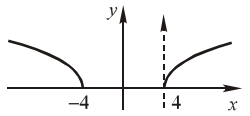
44. $2-y=3\sqrt{x-4}$

1. $\overset{4}{\rightarrow}$
2. $\begin{matrix}\uparrow\\ \downarrow\end{matrix} 3$
3. $\downarrow 2$
4. $\updownarrow$



45. $y=\sqrt{\left|x\right|-4}$

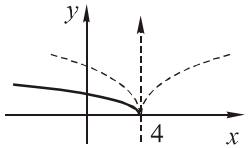
1. $\overset{4}{\rightarrow}$
2. $\Leftarrow$



Глубоов.рф

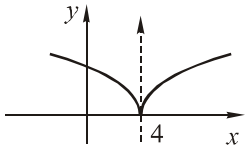
46. $2y=\sqrt{4-x}$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sqrt{-x}$ $\leftrightarrow$
3. $y=\sqrt{-(x-4)}$ $\overset{4}{\rightarrow}$
4. $2y=\sqrt{-(x-4)}$ $\downarrow 2$



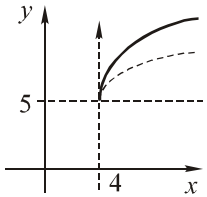
47. $y=\sqrt{|x-4|}$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sqrt{|x|}$ $\Leftarrow$
3. $y=\sqrt{|x-4|}$ $\overset{4}{\rightarrow}$



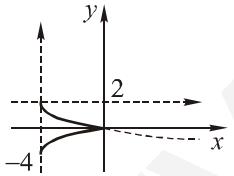
48. $y-5=2\sqrt{x-4}$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=2\sqrt{x}$ $\uparrow 2$
3. $y=2\sqrt{x-4}$ $\overset{4}{\rightarrow}$
4. $y-5=2\sqrt{x-4}$ $\uparrow 5$



49. $|y|=2-\sqrt{x+4}$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=-\sqrt{x}$ $\updownarrow$
3. $y=-\sqrt{x+4}$ $\overset{4}{\leftarrow}$
4. $y=-\sqrt{x+4}+2$ $\uparrow 2$
5. $|y|=-\sqrt{x+4}+2$ $\Downarrow$



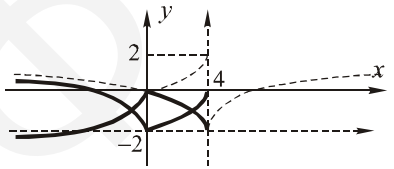
50. $|y+1|=|\sqrt{4-x}-2|-1|$

$y+1=\left|\sqrt{4-x}-2\right|-1$ или $y+1=1-\left|\sqrt{4-x}-2\right|$

$y+2=\left|\sqrt{4-x}-2\right|$ $y=-\left|\sqrt{4-x}-2\right|$

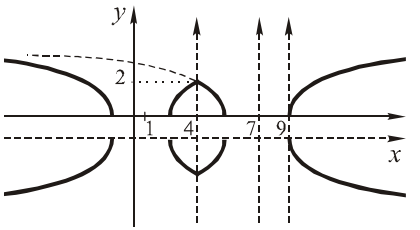
1. $y=\sqrt{x}$ 1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sqrt{-x}$ 2. $y=\sqrt{-x}$ $\leftrightarrow$
3. $y=\sqrt{-(x-4)}$ 3. $y=\sqrt{-(x-4)}$ $\overset{4}{\rightarrow}$

4. $y=\sqrt{-(x-4)}-2$ 4. $y=\sqrt{-(x-4)}-2$ $\downarrow 2$
5. $y=\left|\sqrt{-(x-4)}-2\right|$ 5. $y=\left|\sqrt{-(x-4)}-2\right|$ $\Uparrow$
6. $y+2=\left|\sqrt{-(x-4)}-2\right|$ $\downarrow 2$ 6. $y=-\left|\sqrt{-(x-4)}-2\right|$ $\updownarrow$



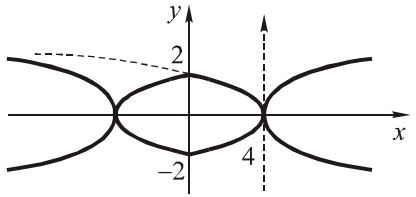
51. $|y|=\sqrt{||x-4|-3|-2}+1$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sqrt{x-2}$ $\overset{2}{\rightarrow}$
3. $y=\sqrt{|x|-2}$ $\Leftarrow$
4. $y=\sqrt{|x-3|-2}$ $\overset{3}{\rightarrow}$
5. $y=\sqrt{||x|-3|-2}$ $\Leftarrow$
6. $y=\sqrt{||x-4|-3|-2}$ $\overset{4}{\rightarrow}$
7. $y=\sqrt{||x-4|-3|-2}+1$ $\uparrow 1$
8. $|y|=\sqrt{||x-4|-3|-2}+1$ $\Downarrow$



52. $y^2=\sqrt[4]{x^2-8|x|+16}$

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sqrt{|x|}$ $\Leftarrow$
3. $y=\sqrt{|x-4|}$ $\overset{4}{\rightarrow}$
4. $|y|=\sqrt{||x|-4|}$ $\Leftarrow,\Downarrow$



53. $y^2=\sqrt[4]{-x^2+8|x|-16}$

ОДЗ: $-(|x|-4)^2\geq 0$; $|x|=4$.

$y^2=0; y=0$. График состоит из двух точек: $\Gamma=\{(-4;0);(4;0)\}$.

ЯГУБОВ.РФ

График дробно-линейной функции

О п р е д е л е н и е. Дробно-линейной называется функция вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $c\neq 0$ (иначе функция линейна), $ad-bc\neq 0$ (иначе функция постоянна).

Ранее показано, что *графиком дробно-линейной функции является гипербола*, и его можно получить с помощью элементарных преобразований (сжатий-растяжений, отражений и сдвигов) из кривой $y=\dfrac{1}{x}$.

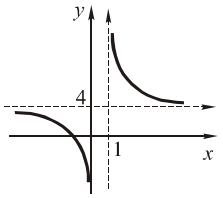
П р и м е р ы

Построить графики:

54. $y=\dfrac{4x+3}{x-1}$.

□ $y=\dfrac{4x+3}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+7}{x-1}=4+\dfrac{7}{x-1}$.

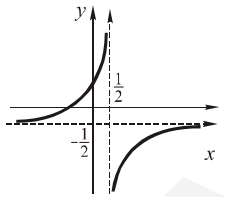
Строим $y=\dfrac{7}{x}$ в осях $x=1$ и $y=4$.



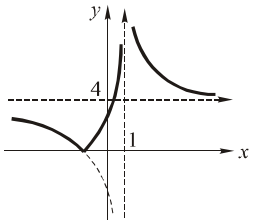
55. $y=\dfrac{x+2}{1-2x}$.

□ $y=\dfrac{x+2}{1-2x}=\dfrac{(1-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{1-2x}=$

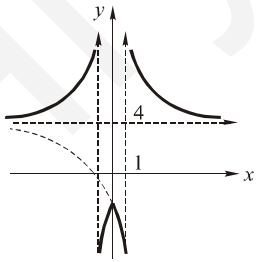
$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2(2x-1)}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}$



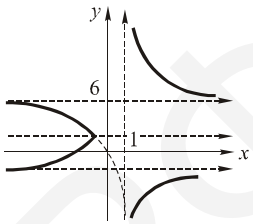
56. $y=\left|\dfrac{4x+3}{x-1}\right|$.



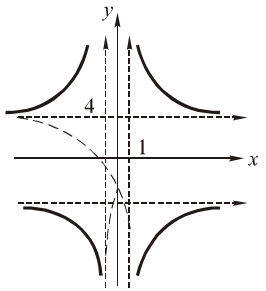
57. $y=\dfrac{4|x|+3}{|x|-1}$.



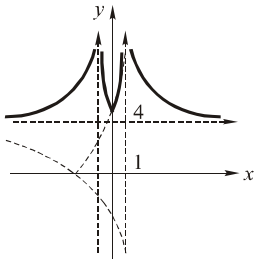
58. $|y-2|=\dfrac{4x+3}{x-1}$.



59. $|y|=\dfrac{4|x|+3}{|x|-1}$.



60. $y=\left|\dfrac{4|x|+3}{|x|-1}\right|$.



61. $y=\dfrac{4|x|+3}{x-1}$.

□ Здесь аргумент x не везде находится под знаком модуля, т.е. придется рассматривать два случая, а затем строить график «кусочно заданной» функции.

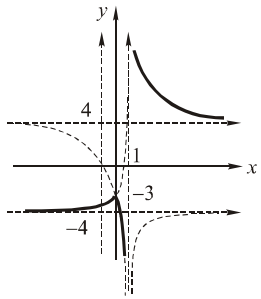
1. $x\geq 0$:

$y=\dfrac{4x+3}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+7}{x-1}=4+\dfrac{7}{x-1}$.

$y=\dfrac{4|x|+3}{x-1}=\begin{cases}4+\dfrac{7}{x-1}, & x\geq 0,\\ -4-\dfrac{1}{x-1}, & x<0.\end{cases}$

2. $x<0$:

$y=\dfrac{-4x+3}{x-1}=\dfrac{-4(x-1)-1}{x-1}=-4-\dfrac{1}{x-1}$.



Практическое замечание. Если нужен только эскиз графика дробно-линейной функции, то удобно действовать по следующей простой схеме, которую проиллюстрируем сразу на примере:

ЯГУБОВ.РФ

1) Определим асимптоты, т.е. оси, в которых будем строить гиперболу.

а) Задаем себе вопрос: какое значение аргумента не входит в область определения функции?
(«Чему никогда не равен x?»)
Отвечаем: знаменатель не равен 0.

б) Задаем себе вопрос: какое значение не входит в множество значений функции?
(«Чему никогда не равен y?»)
Отвечаем: функция не принимает значения, равного отношению коэффициентов при x в числителе и в знаменателе (желающие убедиться выделят целую часть дроби; в остатке числитель будет ненулевой – см. выше).

2) Определим, в каких четвертях относительно этих осей будет располагаться гипербола. Вообще-то, это можно сделать по любой точке. Но удобно брать точку пересечения с осью абсцисс, т.е. приравнять числитель дроби к 0.

$$y=\frac{x-5}{1-x}$$

а) $x\neq 1$.

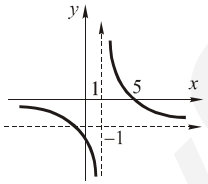
б) $y\neq\frac{1}{-1}=-1$.

Строим график в осях $x=1$ и $y=-1$.

$y=0$: $x=5$.

точка $(5;0)$ находится в I четверти относительно прямых $x=1$ и $y=-1$. Значит, вся гипербола лежит в I и III четвертях.

Рисуем эскиз.



П р и м е р ы графиков, содержащих тригонометрические, показательную, логарифмическую функции.

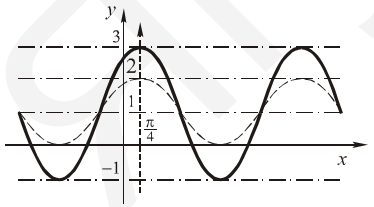
62. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

☐ 1. $y=\cos x$

2. $y=2\cos x$ $\uparrow 2$

3. $y=2\cos\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\xrightarrow{\frac{\pi}{4}}$

4. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ $\uparrow 1$



63. $|y-2|=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

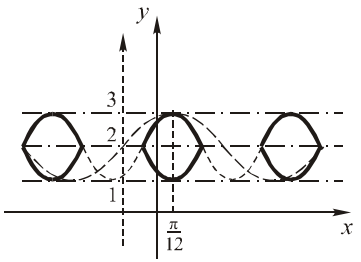
☐ 1. $y=\sin x$

2. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\xleftarrow{\frac{\pi}{3}}$

3. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\rightarrow\leftarrow^{2}$

4. $|y|=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\Downarrow$

5. $|y-2|=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\uparrow 2$



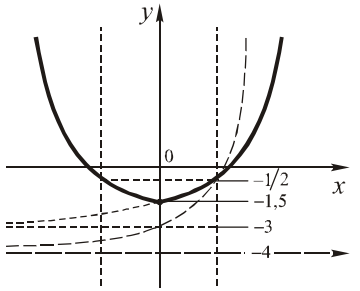
64. $2y=3^{|x|}-4$.

☐ 1. $y=3^x$

2. $y=3^x-4$

3. $2y=3^x-4$

4. $2y=3^{|x|}-4$



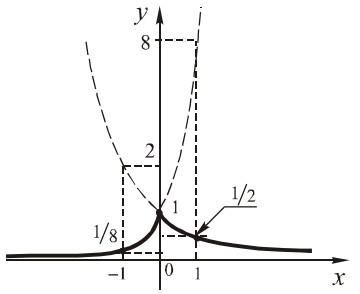
65. $y=(0,25)^{|x|}\cdot 2^x$.

☐ $x\leq 0$:

$y=\left((2)^{-2}\right)^{-x}\cdot 2^x=2^{2x+x}=2^{3x}=8^x$;

$x\geq 0$:

$y=\left(2^{-2}\right)^{-x}\cdot 2^x=2^{-2x+x}=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



ДГУ БОВ.РФ

66. $3-y=\left|\log_2\left(\left|x+3\right|-1\right)\right|$.

☐ 1. $y=\log_2 x$

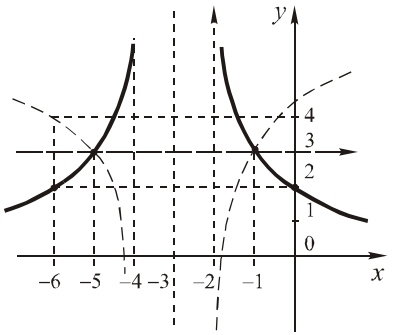
2. $y=\log_2(x-1)$ $\xrightarrow{1}$

3. $y=\log_2\left(\left|x\right|-1\right)$ $\Leftarrow$

4. $y=\log_2\left(\left|x+3\right|-1\right)$ $\xleftarrow{3}$

5. $-y=\log_2\left(\left|x+3\right|-1\right)$ $\Updownarrow$

6. $-(y-3)=\log_2\left(\left|x+3\right|-1\right)$ $\uparrow_3$



Советы для самопроверки.

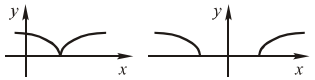
1. Конечно, строить график только «по точкам» не советуем: во-первых, это долго; во-вторых, если взять точек недостаточное количество, то даже вид графика определить не получится; в-третьих, такой способ построения при отсутствии обоснования никогда не устроит экзаменатора (проверяющего, комиссию, вашего учителя и т.д.). Но если вы в себе не очень уверены, или же данная вам формула кажется очень сложной, и хочется проверить свои построения, то никто не запрещает с помощью нескольких произвольно взятых точек получить аргумент в поддержку своего решения, или же обнаружить наличие ошибки.

2. Пользуйтесь симметрией, если она заложена в формуле! Например, если в формуле переменная x встречается только в виде комбинации $\left|x+10\right|$, то это значит, что в нашем случае напрямую от аргумента x ничего не зависит, а имеет значение только расстояние от x до числа (-10), т.е. удаление точки графика от прямой $x=-10$. Если в такой ситуации у вас получился график, не симметричный относительно указанной прямой $x=-10$, то следует поискать ошибку, не правда ли?

3. Частные случаи симметрии: график четной функции обязан получиться симметричным относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

4. Если график вида $y=\left|f(x)\right|$ «залез» в «нижнюю» полуплоскость $(y<0)$, или же график $x=\left|g(y)\right|$ «вылез» «влево» $(x<0)$, налицо явная неправильность в построениях!

5. Смотрите чаще на область определения. Приведем два простых графика:



Как это ни странно, если спросить у школьников, какой из этих графиков соответствует формуле $y=\sqrt{\left|x\right|-3}$, а какой – формуле $y=\sqrt{\left|x-3\right|}$, то правильный ответ, к сожалению, можно получить с вероятностью, близкой к 50%. В то же время, если чуть-чуть задуматься, можно определить требуемое одним простым рассуждением, которое мы и приводим.

Формула $y=\sqrt{\left|x\right|-3}$ определена не для всех значений аргумента (есть ограничение $\left|x\right|\ge 3$), т.е. на графике должна быть «дырка» – для $x\in(-3;3)$ картинка отсутствует. Следовательно, эта формула соответствует правому графику! Оставшаяся же формула – $y=\sqrt{\left|x-3\right|}$ – определена для $x\in R$, т.е. соответствует левому графику.

Сложение, умножение графиков

Что такое «сложить два графика»? Конечно, складывать мы будем не сами графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$, а значения функций f и g и в каждой точке пересечения их областей определения, а затем «при каждом значении аргумента x» поставим на координатной плоскости точку $\left(x;f(x)+g(x)\right)$.

На самом деле мы не сможем поставить точку для всех x, а сделаем это только для некоторых!

«Ну вот, приехали,» – скажет читатель. «Опять, как в начальной школе, строим графики по точкам!»

Да, по точкам. Но:

1) по разумным точкам;

2) если читатель знаком с понятиями «предел» и «асимптота», то привлекаем дополнительно следующие соображения (для остальных даем весьма вольный «перевод»):

а) если какой-либо из графиков-слагаемых имеет вертикальную асимптоту, а другой в этой точке имеет конечный предел, то эта прямая является асимптотой и для суммы графиков;

сумма бесконечности и конечного числа есть бесконечность, т.е. если в какой-либо точке (по x) один из графиков уходит на бесконечность, а другой – нет, то второй график дает очень маленькую «добавку» к первому, поэтому график суммы будет чуть выше (если «добавка» положительна) или чуть ниже (если она отрицательна) первого графика.

Замечание. Если в точке оба графика имеют вертикальные асимптоты, то ситуацию нужно рассматривать подробнее: учитывать «знаки обеих бесконечностей» (если знаки одинаковы, то асимптота будет), а, возможно, и придется проводить другие рассуждения: какая функция растет быстрее и т.д.

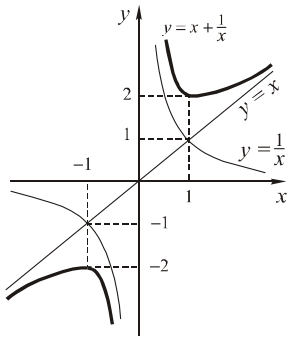
б) если на бесконечности оба графика имеют асимптоты, то сумма графиков в качестве асимптоты имеет сумму асимптот;
если каждое слагаемое на бесконечности близко к какому-либо графику (например, к наклонной или горизонтальной прямой), то сумма близка к сумме этих графиков.

в) если одна из функций-слагаемых – $f(x)$ – ограничена числами a и b, т.е. принимает значения только из отрезка $[a;b]$, то значения суммы $f+g$ заключены между $g(x)+a$ и $g(x)+b$, т.е. график суммы расположен в «коридоре» между двумя графиками $y=g(x)+a$ и $y=g(x)+b$.

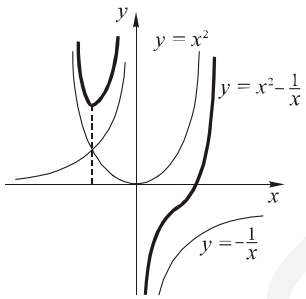
П р и м е р ы

67. $y=x+\frac{1}{x}$.

Замечание. Сумма двух нечетных функций – нечетная функция. Если ваш график получился не симметричным относительно начала координат – ищите ошибку!

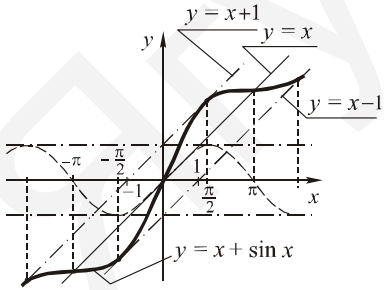


68. $y=x^2-\frac{1}{x}$.



69. $y=x+\sin x$.

$x-1\le x+\sin x\le x+1$; точки с теми абсциссами, где синус обращается в 0 (т.е. синусоида пересекает ось Ox), лежат на прямой $y=x$; точки с теми абсциссами, где синус обращается в ± 1 (это соответствует верхним (нижним) точкам синусоиды) оказываются соответственно на верхней (нижней) границе «коридора». В результате график представляет собой синусоиду, «намотанную» на прямую $y=x$.



Замечание. Точки, лежащие на границах «коридора», вовсе не обязаны быть экстремумами функции! (В их окрестностях найдутся точки, расположенные как выше, так и ниже.)

Умножать графики будем тоже «по точкам»:

1) корни одного множителя, входящие в область определения другого, обращают произведение в 0;

2) а) вертикальная асимптота одного из графиков дает вертикальную асимптоту произведения, если только второй множитель в этой точке не обращается в 0. (если $x=a$ – вертикальная асимптота одного из множителей и, одновременно, корень второго, то требуется дополнительное исследование.)

Около точки $x=a$, где график $y=f(x)$ уходит на бесконечность, значения функции-произведения fg очень велики по модулю, если только ситуация не «$0\cdot\infty$». Тогда это неопределенность, требующая дальнейшего раскрытия.

б) если одна из функций-множителей ограничена, например, числом A (т.е. $|f(x)|\le A$), то $|f(x)\cdot g(x)|\le A|g(x)|$, то результирующий график «зажат» между графиком модулирующей функции g с коэффициентом A ($y=A\cdot g(x)$) и его «антиграфиком» ($y=-A\cdot g(x)$).

Замечание. Аналогично, если $|f(x)|\ge A$, то $|f(x)\cdot g(x)|\ge A|g(x)|$, и результирующий график, наоборот, «не имеет права» входить в полосу между модулирующим графиком $y=A\cdot g(x)$ и его «антиграфиком» $y=-A\cdot g(x)$.

в) если рассматриваемая функция имеет вид $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}\cdot g(x)$, т.е. $y=\operatorname{sgn} f(x)\cdot g(x)$, то удобно вместо длительного расписывания случаев (решения неравенств $f(x)>0$, $f(x)<0$) один раз изобразить вспомогательный график $y=f(x)$, по которому мы будем следить за знаком f, изобразить вспомогательный график $y=g(x)$, из которого, собственно, и будет «изготовлен» конечный график, а затем провести следующую процедуру:

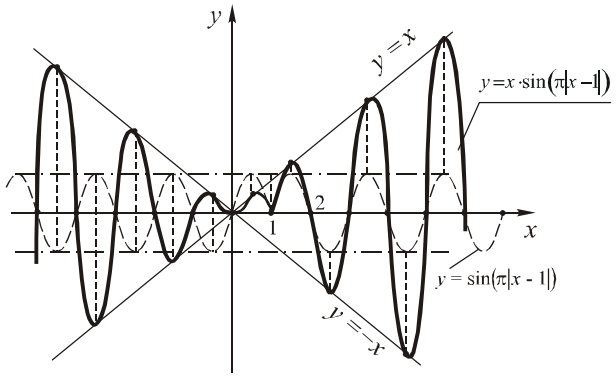
разделить для себя мысленно или на бумаге плоскость на «вертикальные полосы» прямыми, проходящими через корни и точки разрыва функции f (если они есть);

в каждой из полос обвести график $y=g(x)$, если в ней «знаковый» график $y=f(x)$ расположен в верхней полуплоскости (над осью абсцисс), и «перевернуть» график $y=g(x)$ (т.е. изобразить $y=-g(x)$), если график $y=f(x)$ расположен в нижней полуплоскости.

Примеры

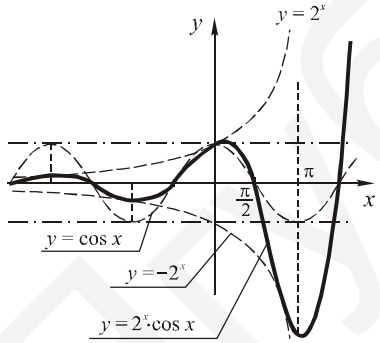
70. $y = x \cdot \sin(\pi|x-1|)$.

□ График «зажат» в паре вертикальных углов между прямыми $y = x$ и $y = -x$; по вспомогательному графику $y = \sin|\pi(x-1)|$ находим точки, в которых синус равен 0, 1 или -1, и ставим точки соответственно на оси абсцисс, на прямой $y = x$ (не на верхней границе «коридора», а именно на прямой $y = x$!) или на прямой $y = -x$.



71. $y = 2^x \cdot \cos x$.

□ Корни совпадают с корнями косинуса, график «бегает» между $y = 2^x$ и $y = -2^x$. Если говорить более строго, то частота колебаний совпадает с частотой колебаний косинуса, а амплитуда задается показательной функцией, т.е. график представляет собой косинусоиду, модулированную показательной функцией.



72. $y = \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 1} \cdot \sin 2x$.

□ $y = \sqrt{tg^2 x + 1} \cdot \sin 2x = \dfrac{1}{|\cos x|} \cdot 2 \sin x \cos x = \dfrac{\cos x}{|\cos x|} \cdot 2 \sin x$.

Изображаем два вспомогательных графика: «знаковый» график $y = \cos x$ и график $y = 2 \sin x$, из которого и получится конечный график.

В тех областях, где косинусоида расположена над осью абсцисс, обводим $y = 2 \sin x$; во всех остальных областях «переворачиваем» график $y = 2 \sin x$. Не забываем «выколоть» точки, где косинус обращается в 0.

Замечание. Можно строить графики и делением, причем делается это совершенно аналогично умножению. Но, так как частное f/g есть не что иное, как произведение $f \cdot (f/g)$, то отдельно мы рассматривать деление графиков не будем. Как строить график $y = 1/g(x)$, читайте в следующем разделе.

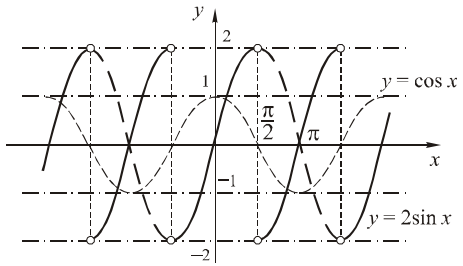


График сложной функции

Ничего особенно нового во вступительном слове к этому разделу Вы, уважаемый читатель, не узнаете, так как график опять строится «по точкам» (по разумным точкам!). Разбирать будем на примерах. Но, тем не менее, хотелось бы до рассмотрения примеров дать несколько полезных советов.

1. Пусть нам нужно построить график $y = f(g(x))$. У вас обязательно на бумаге или мысленно должны быть построены ОБА графика: график ВНУТРЕННЕЙ функции $y = g(x)$ и график ВНЕШНЕЙ функции $y = f(x)$. Иногда удобно строить первый из них на основном чертеже, а второй где-то в стороне или под ним (в другой системе координат), чтобы он был перед глазами.

2. Если удобно строить график внешней функции «по хорошим точкам», то лучше, для большей наглядности, построив график внутренней функции, разметить ось ординат «хорошими» значениями аргумента для внешней функции, а затем посмотреть прямо по картинке, в каких точках внутренняя функция принимала эти значения.

Примеры

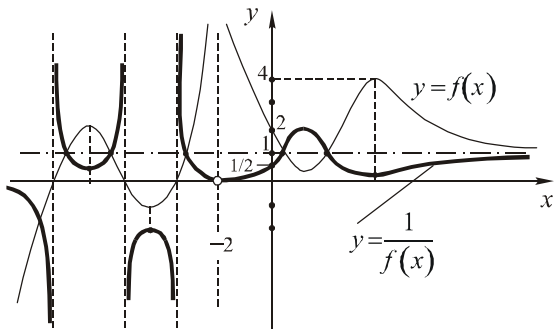
73. $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

□ (В качестве $f(x)$ возьмем какую-либо функцию, не станем задавать ее формулой, а изобразим сразу график. В роли внешней функции здесь выступает $y = 1/x$ – график все знают!)

Обращаем внимание: там, где у функции $f(x)$ расположены корни, $\frac{1}{f(x)}$ имеет вертикальные асимптоты (уходит на бесконечность), причем знаки $f(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$ одинаковы;

если (в данном случае, на минус бесконечности) исходный график уходил на минус бесконечность, то значения $\frac{1}{f(x)}$ будут близки к 0 (т.е. $y=0$ будет левосторонней горизонтальной асимптотой графика $y=\frac{1}{f(x)}$);

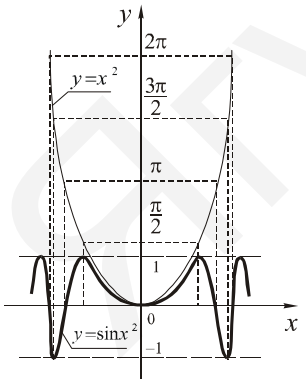
исходный график имел правостороннюю горизонтальную асимптоту $y=1$ (т.е. на плюс бесконечности значения $f(x)$ близки к 1), следовательно, значения $\frac{1}{f(x)}$ будут близки к $1/1=1$, т.е. асимптота остается!



точки исходного графика, имевшие ординату 1, остаются на месте, так как $1/1=1$.

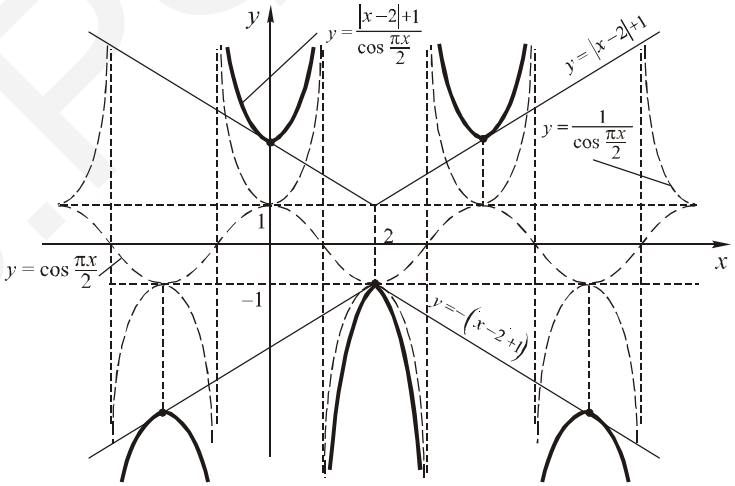
74. $y=\sin x^2$.

□ График построить легко, если по оси ординат сделать разметку через $\frac{\pi}{2}$ (точки, в которых синус принимает «хорошие» значения). Чем дальше от 0, тем чаще волны. Заметим, что функция четная, т.е. наш график должен быть симметричным относительно оси ординат.



75. $y=\dfrac{|x-2|+1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

□ Строим графики $y=\cos\frac{\pi x}{2}$, $y=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$, $y=|x-2|+1$, его «антиграфик», перемножаем. Обращаем внимание, что график «не имеет права» заходить внутрь «бантика»! (так как $\left|\dfrac{1}{\cos\alpha}\right|\ge 1$).



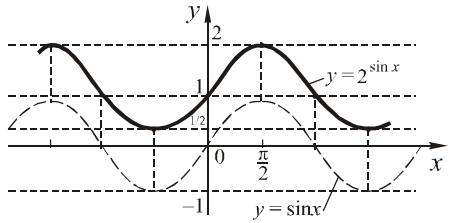
76. $y=2^{\sin x}$.

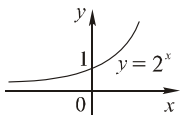
□ Замечаем, что $|\sin x|\le 1$. Тогда

$\frac{1}{2}=2^{-1}\le 2^{\sin x}\le 2^1=2$.

«Хорошие» значения:

$2^0=1;2^{-1}=0{,}5;2^1=2$.



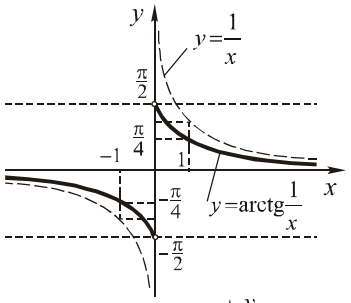


Замечание. Не забываем, что период внутренней функции (здесь 2π) – это период и всей сложной функции!

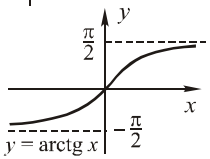
77. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

□ **Замечание**. Если внешняя функция ограниченная, то вся композиция (сложная функция) – тоже ограниченная. В нашем случае – график не может выйти за пределы полосы $|y| < \pi/2$.

На бесконечности $1/x$ стремится к 0, т.е. $\operatorname{arctg}(1/x)$ стремится к $\operatorname{arctg}0 = 0$. Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется. Но если x близко к 0, то $1/x$ уходит на бесконечность (смотри знак!), и график сложной функции «втыкается» в точки $(0; \pm\pi/2)$, не достигая их, соответственно справа и слева от 0. «Хорошие» значения: $\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm 0{,}25 \cdot \pi$.



Замечание. Нечетная функция от нечетной функции (вообще, композиция любого конечного числа нечетных функций) – нечетная функция. График должен получиться симметричным относительно начала координат.

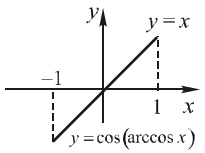


78. $y = \cos(\arccos x)$; $\quad y = \arccos(\cos x)$.

□ Как Вы думаете, какой из графиков построить легче: левый или правый?

Нам кажется, что левый значительно проще. Почему? Да потому, что $\cos(\arccos x) \equiv x$ по определению арккосинуса. Единственная «неприятность» – ограничение на область определения ($|x| \le 1$).

Итак, левый график – отрезок прямой $y = x$:



Теперь давайте займемся правым. Что мы можем сказать об этой функции?

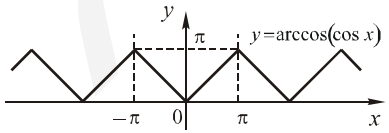
1) Функция периодическая с периодом 2π, как и внутренняя функция $y = \cos x$.

2) Функция четная (т.к. внутренняя функция $y = \cos x$ четная).

3) Функция ограниченная (т.к. внешняя функция $y = \arccos x$ ограничена числами 0 и π).

4) На отрезке $[0; \pi]$ $\arccos(\cos x) \equiv x$ (по определению арккосинуса).

Строим график на отрезке $[0; \pi]$, продолжаем по четности на $[-\pi; \pi]$, по периодичности распространяем на всю числовую ось. Пункт 4) используем для контроля.

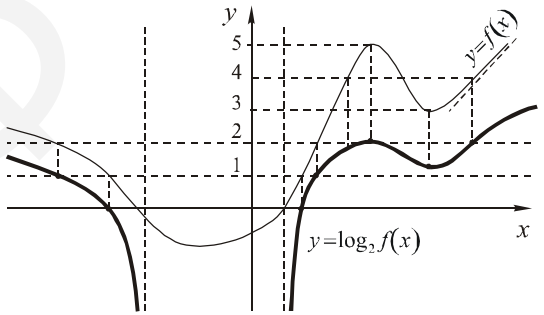


79. $y = \log_a f(x)$.

□ «Логарифмирование графика» ничем принципиально не отличается от построения любого другого графика сложной функции, но логарифм имеет свои удобные для построения особенности, а именно:

1) область определения логарифма – $(0; \infty)$, т.е. на участках, где график $y = f(x)$ располагался ниже оси абсцисс, в результирующем графике не будет ничего;

2) любой логарифм в точке 1 обнуляется, т.е. в тех точках, где f принимала значение 1, будут корни сложной функции.



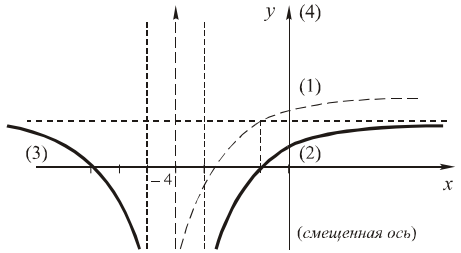
По графику $y = f(x)$ удобно провести прямую $y = 1$, и точки графика, оказавшиеся на этой прямой, «спустить» на ось абсцисс;

3) $\log_a a = 1$. Используя это тождество, по графику $y = f(x)$ проводим прямую $y = a$, и точки графика, оказавшиеся на этой прямой, переносим по вертикали на прямую $y = 1$.

Для примера построен график $y = \log_2 f(x)$, где график $y = f(x)$ нарисован.

80. $y = \log_2 \log_3 |x + 4|$.

1. $y = \log_3 x$
2. $y = \log_2 \log_3 x$
3. $y = \log_2 \log_3 |x|$
4. $y = \log_2 \log_3 |x + 4|$

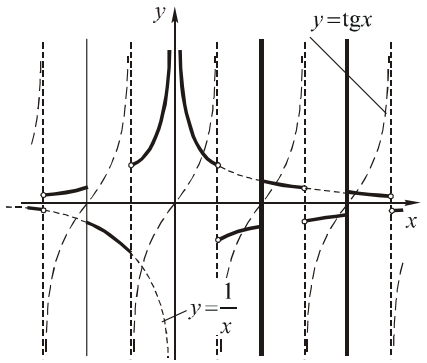


81. $y \cdot |\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{x}$.

□ График строим «по случаям»:

1) $\operatorname{tg} x = 0$ дает решение уравнения во всех случаях, кроме $x = 0$ (на графике появляются вертикальные прямые, проходящие через точки пересечения тангенсоиды с осью абсцисс).

2) $\operatorname{tg} x > 0$ (промежутки отслеживаем по тангенсоиде): обводим $y = 1/x$.



3) $\operatorname{tg}x<0$: «переворачиваем» $y=1/x$, т.е. изображаем $y=-1/x$.

Не забываем про область допустимых значений! Если появились точки на прямых $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, – Вы неправы!

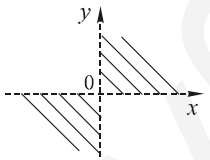
Графики с модулями, симметрией. Графики неравенств

Правила построения графиков с модулями с помощью элементарных преобразований мы уже рассматривали ранее. Приведем несколько примеров, в которых можно обойтись более простыми средствами.

Примеры

82. $\frac{|x|}{x}=\frac{|y|}{y}$.

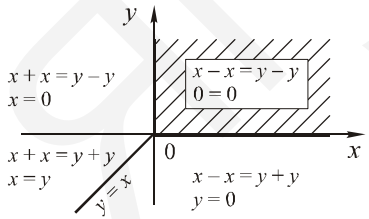
☐ Заметим, что $x\neq 0, y\neq 0$; кроме того, обе дроби могут принимать значения только 1 или -1. Дроби одновременно равны 1, если $x>0$ и $y>0$, и одновременно равны -1, если $x<0$ и $y<0$. График представляет собой I-ю и III-ю координатные четверти без границ.



83. $x-|x|=y-|y|$.

☐ Рассмотрим все случаи раскрытия модулей. Чтобы долго не выписывать, будем писать формулы прямо в соответствующих координатных четвертях.

График представляет собой «I-ю четверть с хвостиком».



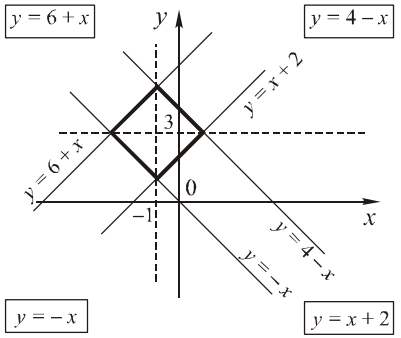
84. $|x+1|+|y-3|=2$.

☐ 1-й способ.

Поступим аналогично предыдущему примеру, только четверти будут ограничивать не координатные оси, а линии перемены знака подмодульных выражений: $x=-1$ и $y=3$. Кстати, если подробно получена формула в одном из случаев, то очень легко перейти к соседнему: поменять знак при раскрытии одного модуля – того, «через чью границу мы переходим».

Например: $(x+1)+(y-3)=2$ – прав. верх.

$-(x+1)+(y-3)=2$ – лев. верх.



2-й способ.

Построим элементарными преобразованиями:

1. $x+y=2$
2. $|x|+|y|=2$ (отражения)
3. $|x+1|+|y-3|=2$ (сдвиг на вектор $(-1;3)$)

Результат не рисуем – он тот же.

3-й способ.

Заметим, что график симметричен относительно прямых $x=-1$ и $y=3$. Строим в одном (любом) уголке, (например, в области $x\geq -1$, $x\geq 3$ обводим отрезок прямой $y=4-x$) и отражаем симметрично.

4-й способ.

Заметим, что фигура должна получиться ограниченная, так как «x не может далеко отойти от -1, а y – от 3». Кроме того, в каждой из четвертей относительно прямых перемены знака подмодульных выражений формула линейна, так что, кроме части какой-либо прямой, на графике ничего получиться не может. Так что, если нам повезет, и мы найдем достаточное количество точек на прямых $x=-1$ и $y=3$ (а именно – четыре!), то график можно рисовать сразу, соединив эти точки отрезками. Реализуем:

$$x=-1:\ \begin{bmatrix} y=1 \\ y=5 \end{bmatrix} \qquad y=3:\ \begin{bmatrix} x=-3 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

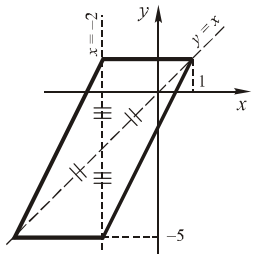
Итак, график будет построен, если мы соединим отрезками четыре точки: $(-1;1),(-1;5),(-3;3),(1;3)$. Это и есть вершины нашего квадрата. (См. график.)

85. $|x-y|+|x+2|=3$.

☐ Здесь годятся способы 1-й и 4-й из описанных в предыдущей задаче (симметрия не проходит, элементарные преобразования – тоже).

$$x=y:\ \begin{cases}|x+2|=3\\ \text{(точки на «разграничительной линии» } x-y=0\text{)}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=1\end{array}\right.$$

$$x=-2:\ \begin{cases}|-2-y|=3\\ \text{(точки на «разграничительной линии» } x+2=0\text{)}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}y=-5\\ y=1\end{array}\right.$$

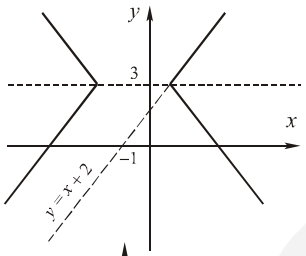


Заметим, что полученная фигура – параллелограмм, так как его диагонали (отрезки «разграничительных линий») делят друг друга пополам! Если у Вас другая фигура – проверяйте!

86. $|x+1|-|y-3|=2$.

☐ Годятся все способы, кроме 4. Сделаем с помощью симметрии относительно прямых $x=-1$ и $y=3$.

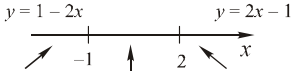
Правый верхний угол $(x\ge -1,\ y\ge 3)$: $y=x+2$.

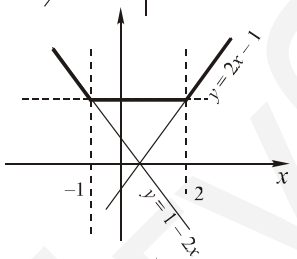


87. $y=|x-2|+|x+1|$.

☐ 1-й с п о с о б.

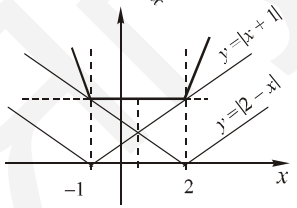
Можно, как в методе интервалов, рассмотреть все возможные случаи расположения x по отношению к числам -1 и 2, записать уравнение в каждом из случаев и аккуратно построить график «кусочно заданной» функции:





2-й с п о с о б.

Можно построить сложением двух графиков.



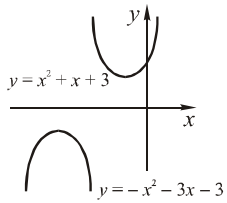
3-й с п о с о б.

Но удобнее всего заметить, что графиком должна быть ломаная, которую можно построить по вершинам + две любые точки (левее левой вершины и правее правой): они нужны, чтобы знать, куда пойдут «хвостики» ломаной. Строим «корытце» по четырем точкам. $y(-1)=3$; $y(2)=3$; $y(-2)=5$; $y(3)=5$. Ставим на плоскости точки $(-2;5);(-1;3);(2;3);(3;5)$, проводим ломаную (см. выше).

88. $|x+y|=x^2+2x+3$.

☐ Обращаем внимание, что правая часть равенства всегда положительна. Это значит, что безо всяких проверок и разборов по случаям можно записать совокупность двух равенств, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}x+y=x^2+2x+3\\ -x-y=x^2+2x+3.\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}y=x^2+x+3\\ y=-x^2-3x-3\end{array}\right.$$



Из двух графиков этих равенств и будет состоять искомый график.

89. $|x+y|=x^2+2x$.

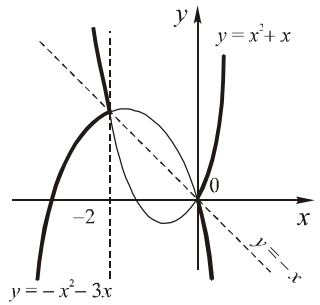
☐ График отличается от предыдущего тем, что правая часть может менять знак.

1-й с п о с о б.

Разбиваем по случаям.

1) $\begin{cases}y\ge -x\\ y=x^2+x\end{cases}$ (часть графика над прямой $x+y=0$);

2) $\begin{cases}y\le -x\\ y=-x^2-3x\end{cases}$ (часть графика под прямой $x+y=0$).



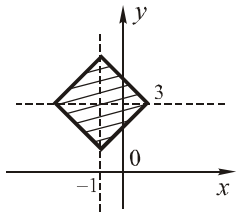
2-й с п о с о б.

Ставим ограничение на правую часть: $\begin{cases}x^2+2x\ge 0,\\ x+y=\pm\left(x^2+2x\right).\end{cases}$

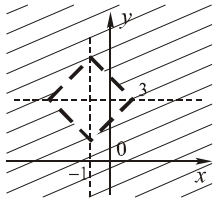
Рисуем две параболы, берем у каждой ту часть, где $x\in(-\infty;-2]\cup[0;\infty)$ (см. тот же чертеж).

90. $|x+1|+|y-3|\le 2$.

«Сумма расстояний от x до -1 и от y до 3 не больше 2». Заштриховываем внутренность квадрата, включая границы.



$|x+1|+|y-3|>2$



«Сумма расстояний от x до -1 и от y до 3 больше 2». Заштриховываем часть плоскости вне квадрата. Граница – пунктиром, она не входит в ответ. Получилась «плоскость с квадратной дырой».

Замечание. Оба графика неравенств можно было построить вообще безо всяких рассуждений: рисуем «границу» – график уравнения (см. выше); получили две области: «внутреннюю» и «внешнюю». Какую из них заштриховывать, определяем по любой точке (не на границе!). Например, точка $(0;0)$ явно не удовлетворяет левому неравенству, но подходит для правого! Следовательно, в левом случае мы выносим в ответ «внутреннюю» часть рисунка (БЕЗ точки $(0;0)$), а в правом случае – «внешнюю» (С точкой $(0;0)$).

Описанный метод широко применяется при построении графиков неравенств, является полным плоскостным аналогом метода интервалов для решения неравенств, и называется МЕТОДОМ ОБЛАСТЕЙ. С помощью метода областей очень удобно решать многие задачи с параметром, требующие рассмотрения многочисленных случаев.

Итак: **<u>Метод областей (построение графика неравенства)</u>**

$F(x,y)>0,<0,\le 0,\ge 0$.

1) Изобразите график уравнения $F(x,y)=0$.

2) Плоскость разбилась на некоторое количество областей. Какие из них входят в ответ, определите по любой точке рассматриваемой области: если ее координаты удовлетворяют неравенству, то область целиком входит в ответ, если же нет – то область в ответ не входит.

91. $(x+y)\left(y-x^2\right)x\le 0$.

□ Строим методом областей. Изобразить график уравнения не составит труда. А вот подставлять точки во всех полученных областях – занятие малоприятное. Но если Вы знакомы с методом интервалов для решения неравенств, то без усилий сообразите, что можно подставить только одну точку и определить, заштриховывать или же нет только одну (любую!) область. А дальше мы будем путешествовать по плоскости, начав путь в этой области и переходя из нее в другие. Каждый раз, пересекая «границу», мы будем анализировать, меняются ли знаки множителей, и, таким образом, будем знать знак произведения!

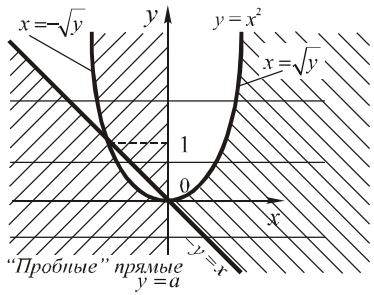
Итак, границы: $y=-x,\ y=x^2,\ x=0$.

Очевидно, точка $(1000;0)$ подходит.

Далее следим за знаками скобок и заштриховываем области «через одну», так как при переходе через любую границу меняется знак ровно одной скобки.

По этому чертежу удобно решить, например, неравенство $(x+a)(a-x^2)x\le 0$ при всех значениях параметра a.

Мысленно перемещаем прямую $y=a$ от «$-\infty$» к «$+\infty$», при этом отслеживаем, какая часть прямой попала в заштрихованную область. Пишем ответ в неравенстве:



при $a\in(-\infty;0)$

$x\in(-\infty;0]\cup[-a;\infty)$;

при $a=0$ $x\in\mathbb{R}$;

при $a\in(0;1)$

$x\in\left(-\infty;-\sqrt{a}\right]\cup[-a;0]\cup\left[\sqrt{a};\infty\right)$;

при $a=1$ $x\in(-\infty;0]\cup[1;\infty)$;

при $a\in(1;\infty)$

$x\in(-\infty;-a]\cup\left[-\sqrt{a};0\right]\cup\left[\sqrt{a};\infty\right)$.

92. $\log_{2-x}\left(y-x^2+1\right)\ge 2$.

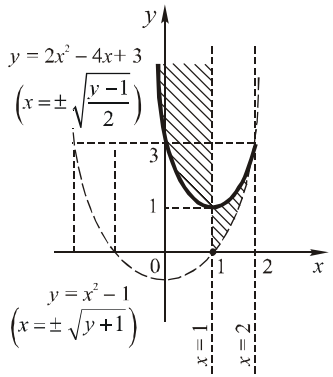
□ ОДЗ: $x<2$, $x\ne 1$, $y>x^2-1$.

Изобразим на чертеже по ОДЗ и график уравнения $\log_{2-x}\left(y-x^2+1\right)=2$, т.е. кривую

$$y-x^2+1=(x-2)^2$$

$$y-x^2+1=x^2-4x+4$$

$$y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1.$$



Далее будем действовать методом областей, «тестируя по точке» одну из областей и следя за переменой знака при переходе через «границы».

Решим неравенство $\log_{2-x}\left(a-x^2+1\right)\ge 2$ при всех значениях параметра a:

при $a\in(-\infty;0]$ $\varnothing$; при $a\in(0;1]$ $x\in\left(1;\sqrt{a+1}\right)$;

при $a\in(1;3)$ $x\in\left[1-\sqrt{\frac{a-1}{2}};1\right)\cup\left[1+\sqrt{\frac{a-1}{2}};\sqrt{a+1}\right)$;

при $a\in[3;\infty)$ $x\in\left[1-\sqrt{\frac{a-1}{2}};1\right)$.

Глава 10. ПРОГРЕССИИ

В этой главе мы рассмотрим две последовательности специального вида – арифметическую и геометрическую прогрессии.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

О п р е д е л е н и е.

Арифметической прогрессией называется последовательность (a_n), заданная рекуррентно следующим образом:

$a_1 = a$; $\forall n \in N \quad a_{n+1} = a_n + d$, $d,\ a \in R$,

т.е. первый член прогрессии задан, а каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего на одно и то же число d, называемое *разностью арифметической прогрессии*.

Свойства арифметической прогрессии

Доказать свойства, пользуясь, где это необходимо, методом математической индукции.

1. Формула *n-го члена*:

$$a_n = a + d(n-1).$$

2. Формула *суммы n первых членов:*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

О п р е д е л е н и е.

Геометрической прогрессией называется последовательность (b_n), заданная рекуррентно следующим образом:

$b_1 = b$; $\forall n \in N \quad b_{n+1} = b_n q$, $q,\ b \in R$,

т.е. первый член прогрессии задан, а каждый член, начиная со второго, отличается от предыдущего умножением на одно и то же число q («в одно и то же число раз»), называемое *знаменателем геометрической прогрессии.*

Свойства геометрической прогрессии

Доказать свойства, пользуясь, где это необходимо, методом математической индукции.

1. Формула *n-го члена*:

$$b_n = b \cdot q^{n-1}.$$

2. Формула *суммы n первых членов* (если $q \neq 1$, т.е. прогрессия не постоянная):

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q} = \frac{b(1-q^n)}{1-q}.$$

3. Характеристическое свойство (т.е. критерий того, что последовательность является арифметической прогрессией, или необходимое и достаточное условие):

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

или $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

т.е. каждый член, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов.

4. $a_n = a_m + d(n-m)$. (Арифметическая прогрессия получится, если начать рассматривать последовательность с любого члена, не обязательно с первого!)

5. $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n > k$.

6. $a_n + a_m = a_k + a_l$, если $n + m = k + l$.

7. Рассмотрим последовательность, составленную из сумм членов прогрессии, взятых по m, т.е.

$$s_1 = a_1 + \ldots + a_m, s_2 = a_{m+1} + \ldots + a_{2m}, \ldots,$$
$$s_n = a_{(n-1)m+1} + \ldots + a_{nm}.$$

Выясним, что за последовательность получилась. Каждое слагаемое в сумме s_l отличается от соответствующего слагаемого в сумме s_{l-1} на md, тогда

3. *Характеристическое свойство* (т.е. критерий того, что последовательность является геометрической прогрессией, или необходимое и достаточное условие):

$$\forall n \geq 2 \qquad |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}},$$

или $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

т.е. каждый член, начиная со второго, по модулю является средним геометрическим предыдущего и последующего членов.

4. $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$. (Геометрическая прогрессия получится, если начать рассматривать последовательность с любого члена, не обязательно с первого!)

5. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n > k$.

6. $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$, если $n + m = k + l$.

7. Рассмотрим последовательность, составленную из сумм членов прогрессии, взятых по m, т.е.

$$s_1 = b_1 + \ldots + b_m, s_2 = b_{m+1} + \ldots + b_{2m}, \ldots,$$
$$s_n = b_{(n-1)m+1} + \ldots + b_{nm}.$$

Выясним, что за последовательность получилась. Каждое слагаемое в сумме s_l отличается от соответствующего слагаемого в сумме s_{l-1} умножением на

$s_l = s_{l-1} + md \cdot m = s_{l-1} + d \cdot m^2$ (слагаемых тоже m).	q^m, тогда $s_l = s_{l-1} \cdot q^m$ (количество слагаемых в обеих суммах одинаково, множитель q^m выносится за скобки).
Таким образом, *последовательность (s_n) из сумм «m-ок» членов исходной прогрессии является также арифметической прогрессией с разностью $m^2 \cdot d$.*	Таким образом, *последовательность (s_n) из сумм «m-ок» членов исходной прогрессии является также геометрической прогрессией со знаменателем q^m.*

Примеры

1. ***Сумма*** 8***-го и*** 15***-го членов арифметической прогрессии равна*** 48***. Найти сумму*** 22***-х первых членов прогрессии.***

□ Пусть (a_n) – данная арифметическая прогрессия. Можно решать задачу по-разному.

Во-первых, всегда есть в запасе способ, который заключается в записи условия через $a_1 = a$ и разность прогрессии d, с последующим нахождением a и d, или же их нужной комбинации. Продемонстрируем.

По условию $a_8 + a_{15} = a + 7d + a + 14d = 2a + 21d = 48$.

$S_{22} = \dfrac{2a + 21d}{2} \cdot 22 = 11(2a + 21d) = 11 \cdot 48 = 528$. Задача решена.

Во-вторых, мы можем использовать менее тривиальные свойства. В данном случае, подойдет «$a_n + a_m = a_k + a_l$, если $n + m = k + l$».

Дано: $a_8 + a_{15} = 48$. Найти: $S_{22} = \dfrac{a_1 + a_{22}}{2} \cdot 22$. Но $8 + 15 = 1 + 22$, т.е.

$S_{22} = \dfrac{a_8 + a_{15}}{2} \cdot 22 = 528.$

Ответ: 528.

2. ***Девятый член арифметической прогрессии равен*** 20***. Найти сумму первых*** 17 ***членов прогрессии.***

□ Аналогично, $1 + 17 = 18 = 9 + 9$.

$$S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \cdot 17 = \frac{2a_9}{2} \cdot 17 = 20 \cdot 17 = 340.$$

Ответ: 340.

3. ***Сумма первых*** 10 ***членов арифметической прогрессии равна*** 100***, сумма первых*** 30 ***членов той же прогрессии равна*** 900. ***Найти сумму первых*** 40 ***членов прогрессии.***

□ Если решать «честно», то получится так:

$$S_{10} = \frac{2a + 9d}{2} \cdot 10 = 5(2a + 9d) = 100;$$

$$S_{30} = \frac{2a + 29d}{2} \cdot 30 = 15(2a + 29d) = 900.$$

$$\begin{cases} 2a + 9d = 20 \\ 2a + 29d = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} 20d = 40 \\ 2a = 20 - 9d \end{cases} \quad \begin{cases} d = 2 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

$$S_{40} = \frac{2a + 39d}{2} \cdot 40 = 20(2a + 39d) = 20(2 + 78) = 1600.$$

Если вспомнить, что суммы десятков членов прогрессии – тоже арифметическая прогрессия (например, (x_n)), и нам даны ее первый член $x_1 = 100$ и сумма трех первых членов $x_1 + x_2 + x_3 = 900$, то можно действовать с «более крупными блоками»:

$$S_3 = \frac{2x_1 + 2D}{2} \cdot 3 = 900; \;\; x_1 = 100.$$

$$x_1 = 100; \;\; D = 200.$$

$$S_4 = \frac{2x_1 + 3D}{2} \cdot 4 = 2(2 \cdot 100 + 3 \cdot 200) = 1600.$$

Ответ: 1600.

4. ***Найти сумму всех четных трехзначных чисел, кратных*** 3.

□ Кратно 3 каждое третье число; среди них четные и нечетные чередуются, т.е. требуемому условию удовлетворяет каждое шестое число. Значит, мы имеем дело с арифметической прогрессией, разность которой равна 6, а первый член – первое четное трехзначное число, кратное 3, т.е. 102. Последний же, n-й член прогрессии, – число 996.

Итак: $(a_n): a_1 = 102, \; a_n = 996, \; d = 6$. $S_n - ?$

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad 996 = 102 + 6(n-1),$$

$$n = 1 + \frac{996 - 102}{6} = 1 + \frac{894}{6} = 1 + 149 = 150,$$

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350.$$

Ответ: 82350.

ЯГУБОВ Р.Р.

5. ***Сумма*** n ***первых членов некоторой последовательности вычисляется по формуле*** $S_n = 3n^2 - n$ ***. Верно ли, что эта последовательность – арифметическая прогрессия?***

☐ Даже если мы подгоним данную формулу под формулу суммы арифметической прогрессии, это не будет являться доказательством. А если не получится подогнать? Поэтому рассуждаем. Хорошо бы узнать формулу *n*-го члена. А можно ли это сделать, зная формулу суммы? Конечно! Вычтем из суммы n первых членов сумму $(n-1)$ первого члена, и получим один *n*-й! А дальше воспользуемся определением прогрессии или ее характеристическим свойством.

$$S_n = 3n^2 - n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(3n^2 - n\right) - \left(3(n-1)^2 - (n-1)\right) = \left(3n^2 - n\right) - \left(3n^2 - 7n + 4\right) = 6n - 4;$$

$$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) - 4 - 6n + 4 = 6.$$

Видим, что разность двух соседних членов последовательности – величина постоянная, таким образом, дана арифметическая прогрессия (по определению).

6. ***Сумма*** n ***первых членов некоторой последовательности вычисляется по формуле*** $S_n = 3^n + 1$ ***. Верно ли, что эта последовательность – геометрическая прогрессия?***

☐ Аналогичная задача, только в конце нужно не вычитать, а делить два соседних члена.

$$S_n = 3^n + 1. \quad b_n = S_n - S_{n-1} = 3^n + 1 - 3^{n-1} - 1 = 3^{n-1}(3-1) = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} = 3 = \text{const}.$$

Заметим, что формула *n*-го члена верна при $n \geq 2$ (так как S_0 не определено). Можно проверить, что $b_1 = S_1 = 4$, а по формуле $b_1 = 2 \cdot 3^\circ = 2$.

В ы в о д: (b_n) – геометрическая прогрессия, начиная со второго члена.

7. ***В геометрической прогрессии сумма второго и шестого членов равна*** 34***, сумма третьего и седьмого равна*** 68. ***Найти сумму*** 10 ***первых членов прогрессии***.

☐ Записываем все через b и q:

$$b_2 + b_6 = bq + bq^5 = 34; \quad b_3 + b_7 = bq^2 + bq^6 = 68.$$

$$\begin{cases} bq\left(1+q^4\right) = 34, \\ bq^2\left(1+q^4\right) = 68, \end{cases} \quad \begin{cases} q = \dfrac{68}{34} = 2, \\ b \cdot 2(1+16) = 34, \end{cases} \quad \begin{cases} q = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

$$S_{10} = \frac{b\left(1-q^{10}\right)}{1-q} = \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023.$$

Ответ: 1023.

8. ***Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на*** 2***, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Если затем третье число увеличить на*** 9***, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа***.

☐ К решению подобных задач (точнее, к записи решения) можно дать два подхода.

Первый: записываем все в терминах (исходной) прогрессии: даны числа b, bq, bq^2.

Во втором случае $b,\ bq+2,\ bq^2$ – арифметическая прогрессия.

Далее $b,\ bq+2,\ bq^2+9$ – геометрическая прогрессия.

Чтобы не вводить другие переменные, запишем условия образования прогрессий с помощью характеристических свойств:

$$\begin{cases} 2(bq+2) = b + bq^2, \\ (bq+2)^2 = b\left(bq^2+9\right). \end{cases}$$

Решим систему.

$$\begin{cases} b^2q^2 - 2b \cdot bq = 4b - b^2 \\ b^2q^2 + 4bq + 4 = b^2q^2 + 9b, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{9}{4}b - 1\right)^2 - 2b\left(\dfrac{9}{4}b - 1\right) - 4b + b^2 = 0 \\ bq = \dfrac{9}{4}b - 1, \end{cases}$$

$$(9b-4)^2 - 8b(9b-4) - 64b + 16b^2 = 0,$$

$$25b^2 - 104b + 16 = 0; \quad q = \frac{9}{4} - \frac{1}{b}.$$

$$b = \frac{52 \pm 48}{25}; \quad b_1 = 4; \quad b_2 = \frac{4}{25}.$$

$$q_1 = 2; \quad q_2 = -4.$$

Ответ: $(4;8;16);\ \left(\dfrac{4}{25}; -\dfrac{16}{25}; \dfrac{64}{25}\right)$.

Второй: вводим искомые числа и записываем характеристические свойства всех прогрессий.

Пусть числа – $a,\ b,\ c$. Получаем систему:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 2(b+2) = a + c \\ (b+2)^2 = a(c+9), \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = ac \\ 2b + 4 = a + c \\ 4b + 4 = 9a, \end{cases} \quad \begin{cases} 4b^2 = 4ac \\ 2b = a + c - 4 \\ 2(a+c-2) = 9a, \end{cases} \quad \begin{cases} (a+c-4)^2 = 4ac \\ 2(a+c-2) = 9a \\ b = \dfrac{a+c}{2} - 2. \end{cases}$$

Далее решаем систему из первой и второй строк, а затем находим b. В данном случае в такой записи задача решается даже проще.

ЯГУБОВ Р.Ф.

9. ***В арифметической прогрессии*** 12 ***членов, ее сумма равна*** 354. ***Отношение суммы членов с четными номерами к сумме членов с нечетными номерами равно*** $32/27$ ***. Найти разность прогрессии***.

□ При решении можно опираться на то, что как члены с четными номерами, так и члены с нечетными номерами образуют, в свою очередь, арифметические прогрессии с разностью $2d$, и можно записать формулы для сумм шести первых членов. А можно поступить нестандартно:

$$a_2 = a_1 + d;\ \ a_4 = a_3 + d;...;\ \ a_{12} = a_{11} + d\ .$$

Тогда $S_{чет.} = S_{нечет.} + 6d;\ \ S_{12} = S_{чет.} + S_{нечет.}$

Получаем:

$$2S_{нечет.} + 6d = 354\ ;\ \ \frac{S_{нечет.} + 6d}{S_{нечет.}} = \frac{32}{27}\ .$$

Отсюда находим $d = 5$.

Ответ: 5.

10. ***Найти сумму квадратов второго и четвертого членов некоторой арифметической прогрессии, если сумма любого числа ее первых членов меньше учетверенного номера последнего из выбранных членов на квадрат этого номера.***

□ Здесь возможно два способа решения, причем каждый требует верного понимания условия задачи, хотя используется оно по-разному.

В первом случае мы заодно проверим корректность условия, т.е. что такая прогрессия вообще возможна. Составим уравнение:

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n + n^2 = 4n\ ,\ \text{т.е. } 2a_1 + d(n-1) + 2n = 8\ ,$$

учитывая положительность номера n. Преобразуем уравнение, получим

$$n(d+2) + (2a_1 - d - 8) = 0\ .$$

Запишем условие тождественного равенства многочленов от переменной n, записанного в предыдущей строке:

$$\begin{cases} d+2=0 \\ 2a_1 = d+8 \end{cases};\ \begin{cases} d=-2 \\ a_1 = 3. \end{cases}\quad \text{Тогда } {a_2}^2 + {a_4}^2 = 10\ .$$

Во втором случае поверим составителю, что условие задачи написано грамотно, т.е. что такая прогрессия возможна, и, используя ключевое слово «любого» из условия, запишем в систему уравнения для двух произвольно взятых номеров n, например, $n=1,\ n=2$:

$$\begin{cases} a_1 + 1^2 = 4\cdot 1 \\ a_1 + (a_1 + d) + 2^2 = 4\cdot 2 \end{cases},$$

откуда и найдем a_1 и d.

Ответ: 10.

11. ***Могут ли числа*** $3;\ \sqrt{7};\ 9$ ***быть членами одной арифметической прогрессии?***

□ Сложность задачи в том, что неясно, идет ли речь о последовательных членах прогрессии, или же нет. Будем считать, что нет (иначе будет разобран только частный случай! Конечно же, это не будет решением.)

От противного, пусть данные числа входят в арифметическую прогрессию под (различными) номерами $k,\ m,\ n$ соответственно. Тогда

$$9-3 = a_n - a_k = d(n-k);\ \ \sqrt{7}-3 = a_m - a_k = d(m-k)\ .$$

$$\begin{cases} d(n-k) = 6 \\ d(m-k) = \sqrt{7}-3\ . \end{cases}$$

Отсюда $\dfrac{\sqrt{7}-3}{6} = \dfrac{m-k}{n-k} \in Q$ (рациональное число).

Тогда $\left(\sqrt{7}-3\right) \in Q$; и $\sqrt{7} \in Q$, что неверно.

Ответ: Числа $3;\ \sqrt{7};\ 9$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, для каждого натурального n S_n – сумма n ее первых членов. Рассмотрим последовательность S_n.

$$S_1 = b_1$$
$$S_2 = b_1 + b_2$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

О п р е д е л е н и е. ***Суммой бесконечной геометрической прогрессии*** называется предел последовательности S_n, если он существует и конечен.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n\ .$$

Утверждение. Указанный предел существует тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. В этом случае бесконечная геометрическая прогрессия называется убывающей (хотя может быть и знакопеременной).

Действительно, вспомним формулу суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{b}{1-q}q^n\ .$$

S_n сходится в том и только в том случае, когда сходится $(c_n) = q^n$, т.е. при $|q| < 1$ (так как при $q \neq \pm 1$ (c_n) – либо бесконечно большая при $|q| > 1$, либо бесконечно малая при $|q| < 1$). Тогда

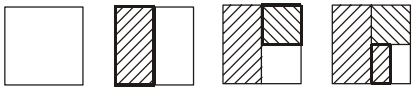
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q}.$$

Мы получили формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$\boxed{S = \frac{b}{1-q}}$$

«Здравый смысл» может возмутиться: «Как же сумма бесконечного количества слагаемых, пусть даже маленьких, может быть конечным числом?»

Приведем одну известную наглядную иллюстрацию.



Построим геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$ следующим образом.

1. Возьмем квадрат со стороной 1 (см. рис.). Делим квадрат пополам.

Первый член нашей прогрессии – площадь левой половины квадрата $S_1 = \frac{1}{2}$.

2. Оставшуюся часть делим пополам, берем верхнюю половину. Ее площадь – второй член прогрессии: $S_2 = \frac{1}{4}$.

3. Догадались, откуда возьмется третий член? Это опять площадь половины (левой) оставшейся части квадрата $S_3 = \frac{1}{8}$. И так далее, т.е.

$$S_n = \frac{1}{2^n}$$

Очевидно, что сумма всей прогрессии – площадь квадрата, т.е. 1 (конечное число!)

Пример

12. ***Сумма бесконечной геометрической прогрессии в*** $1,75$ ***раза больше суммы кубов ее членов. Найти знаменатель прогрессии, если ее первый член равен*** 1.

□ Кубы членов геометрической прогрессии $(b^3;\ b^3q^3;\ b^3q^6;\ b^3q^9;...)$ также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^3.

Запишем условие: $\frac{b}{1-q} = 1,75 \cdot \frac{b^3}{1-q^3}$; $b = 1$; $\frac{4}{1-q} = \frac{7}{1-q^3}$

$$4(q^2+q+1) = 7$$
$$4q^2 + 4q - 3 = 0$$
$$(2q+1)^2 = 4.$$

Решим уравнение, учитывая, что по условию $|q| < 1$.

$$\left[\begin{array}{l} 2q+1 = 2 \\ 2q+1 = -2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} q = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $q = \frac{1}{2}$.

ЯГУБОВ.РФ

Глава 11. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА

Предел функции

Предел – понятие, позволяющее описать *поведение функции* **в окрестности точки** (на бесконечности), а не вычислить значение в этой точке. Оно освещает следующий вопрос: «Что происходит со значениями функции при приближении аргумента к заданной точке или при стремлении аргумента к бесконечности?» В этом разделе мы рассмотрим предел функции в точке.

В качестве первого примера возьмем линейную функцию $f(x)=2x-1$. Каждый школьник, имеющий некоторое представление о линейной функции и знающий, что ее графиком является прямая, скажет, без сомнения, что если аргумент x приближается к 3, то значение функции приближается к числу $2\cdot 3-1=5$.

Далее: пусть рассматривается функция $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Что происходит с функцией при приближении аргумента к 3? Просто подставить число 3 в формулу нельзя, так как в точке 3 функция не определена. Но если расписать функцию так: $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3,\ x\neq 3$, то видно, что «около» точки 3 функция опять линейна, и при стремлении аргумента к 3 значение приближается к числу $3+3=6$.

Будем называть пределом функции в точке 3 в первом примере число 5, а во втором – число 6. Оформим данное понятие строгим математическим образом.

О п р е д е л е н и е. Число b называется ***пределом функции*** f ***в точке*** a, если $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_{(\varepsilon)}>0:\ \big(0<|x-a|<\delta\big)\Rightarrow\big(|f(x)-b|<\varepsilon\big)$.

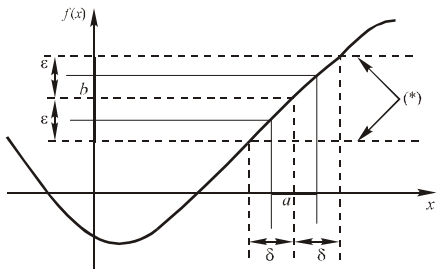
Геометрическая интерпретация:

ε – радиус интервала вокруг точки b (предполагаемого предела) заранее неизвестен, т.е. может быть любым, от нас не зависит;

δ (зависит от ε) – радиус интервала вокруг точки a, выбираем сами, зная заданное ε; δ разрешается делать сколь угодно малым с целью уменьшить расстояние между значением функции и предполагаемым пределом.

ε – «задание», «цель», дается неожиданно, поэтому нужно быть готовым к любому его значению.

δ – «средство выполнения задания», «инструмент», который мы вольны выбирать себе сами (конечно, зная «заданное» ε).



Итак:

1. Для любой окрестности числа b $\big(O(b;\varepsilon)\big)$ найдется такая проколотая (без самой точки a!) окрестность точки a $\left(\overset{o}{O}(a;\delta)\right)$, что для любого x из этой окрестности значение функции $f(x)$ принадлежит $O(b;\varepsilon)$.

2. Какой бы радиус (ε) нам ни задали, по ε можно найти δ таким образом, что как только аргумент x приближается к a (насколько? – меньше, чем на δ), **не становясь равным** a, значение $f(x)$ становится близко к предполагаемому пределу b (насколько? – меньше, чем на ε).

3. Произвольно заданное ε определяет симметричный «коридор» с осью $y=b$ (*) на координатной плоскости (см. рис.). Если число b является пределом функции f в точке a, то можно выбрать (проколотый!) интервал вокруг точки a, такой, что часть графика, соответствующая аргументам из этого интервала, находится в «коридоре» (*).

Некоторая произвольность выбора δ: график (см. рис.) может находиться и в более узком «коридоре», тогда он точно не выйдет за пределы полосы (*)!

Замечания.

1. Понятие предела функции в точке абсолютно не связано с понятием значения функции в этой точке! Функция даже может быть не определена в рассматриваемой точке, а может иметь в ней любое значение, например, отличное от значения предела.

2. $\delta_{(\varepsilon)}$ не обязано быть фиксированным! Если какое-либо $\delta=\delta_0$ подходит, то любое положительное $\delta<\delta_0$, например, $0{,}007\delta_0$, тоже подходит.

О б о з н а ч е н и е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ (читаем: «предел функции f в точке a равен b»).

Примеры

Доказать пределы по определению:

1. $\forall a \in R \quad \lim\limits_{x \to a} c = c$.

□ Вспомним определение предела функции в точке и по заданному ε (в общем виде) попробуем подобрать δ так, чтобы при $0 < |x-a| < \delta$ выполнялось условие $|f(x)-c| < \varepsilon$ (c – предполагаемый предел).

Итак, пусть задано $\varepsilon > 0$.

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in R ,$$

так что δ можно брать любым (положительным).

2. $\forall a \in R \quad \lim\limits_{x \to a} (kx+b) = ka+b$.

□ Пусть задано $\varepsilon > 0$.

$$|f(x)-c| = |kx+b-(ka+b)| = |kx-ka| = |k| \cdot |x-a| < \varepsilon ;$$

при $k = 0 \quad x \in R$, при $k \neq 0 \quad |x-a| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$.

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ при $k \neq 0$, и $\delta \in R$ при $k = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x-1}{x+1} = -1$.

□ Пусть задано $\varepsilon > 0$.

$$|f(x)-c| = \left| \frac{5x-1}{x+1} + 1 \right| = \left| \frac{5x-1+x+1}{x+1} \right| = \frac{6|x|}{|x+1|} .$$

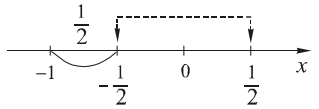
Напомним две простые идеи:

1) если числитель и знаменатель дроби положительны, то чем больше числитель и чем меньше знаменатель, тем больше дробь;

2) если $a \le b < \varepsilon$, то $a < \varepsilon$ (свойство транзитивности неравенства).

Далее: заметим, что если x «разрешить» неограниченно приближаться к числу –1, то знаменатель дроби $\dfrac{6|x|}{|x+1|}$ будет неограниченно уменьшаться по модулю, и дробь нельзя будет сделать меньше ε . Поэтому необходимо отделить x от -1 . Попробуем заранее ограничить «зону поиска δ» так, чтобы оценить дробь сверху, заменив знаменатель на некоторое число, а затем уже увеличенную дробь будем делать меньше ε . Тогда и исходная дробь $\dfrac{6|x|}{|x+1|}$ станет меньше ε .

Если, например, сразу ограничить $\delta \le \dfrac{1}{2}$ (вместо $\dfrac{1}{2}$ можно взять любое число между 0 и 1), то $|x+1| > \dfrac{1}{2}$ (см. рис.): расстояние от $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ до -1 всегда больше $\dfrac{1}{2}$. Тогда $\dfrac{6|x|}{|x+1|} < \dfrac{6|x|}{\frac{1}{2}} = 12|x| < \varepsilon$.



$|x| < \dfrac{\varepsilon}{12}$. На δ есть два условия: $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{12}, \delta \le \dfrac{1}{2}$.

Положим $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$.

О п р е д е л е н и е. Число b называется ***пределом функции*** f ***в точке*** a ***слева***, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \ (0 < a-x < \delta) \Rightarrow (|f(x)-b| < \varepsilon)$.

Число b называется ***пределом функции*** f ***в точке*** a ***справа***, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 :$

$$(0 < x-a < \delta) \Rightarrow (|f(x)-b| < \varepsilon) .$$

✦ Для любой окрестности числа b $(O(b;\varepsilon))$ найдется такая проколотая (без самой точки a !) левая или правая полуокрестность точки a $\left(\overset{o}{O}_{\pm}(a;\delta)\right)$, что для любого x из этой полуокрестности значение функции $f(x)$ принадлежит $O(b;\varepsilon)$. Как видим, определение почти полностью повторяет определение предела функции в точке с той лишь разницей, что x «бежит» к a слева или справа.

О б о з н а ч е н и е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b, \quad \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ (читаем: «предел функции f в точке a слева, справа равен b»).

Теорема. **Критерий существования предела функции в точке.**
Предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела, и они равны. Тогда предел функции в этой точке равен односторонним пределам.

Глубов.РФ

Свойства предела функции в точке

• Пусть функции f и g имеют (конечные) пределы в точке a. Тогда функция $f+g$ имеет предел в точке a, причем
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

• Пусть функции f и g имеют (конечные) пределы в точке a. Тогда функция $f\cdot g$ имеет предел в точке a, причем
$\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

• Пусть функции f и g имеют (конечные) пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$. Тогда функция f/g имеет предел в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$.

• Функция в точке не может иметь двух различных пределов.

• Если функция имеет (конечный) предел в точке, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.

• $\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\right)\Rightarrow\left(f(x)=b+\alpha(x)\right)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (функция в окрестности точки отличается от своего предела на бесконечно малую).

• Если функция имеет в точке ненулевой конечный предел, то в некоторой (проколотой!) окрестности этой точки знак функции совпадает со знаком предела.

• Пусть в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=b$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

Непрерывность. Метод интервалов для решения неравенств

О п р е д е л е н и е. Функция f называется **непрерывной в точке** a, если выполнены следующие три условия:

а) $a\in D_f$;

б) $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\infty$ (предел функции f в точке a существует и конечен);

в) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Переформулировка в терминах $\varepsilon-\delta$:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_{(\varepsilon)}>0:\ \ \left(|x-a|<\delta\right)\Rightarrow\left(|f(x)-f(a)|<\varepsilon\right).$$

(Сравните с определением предела функции в точке!)

Замечание. Аналогично понятиям односторонних пределов можно определить понятие односторонней непрерывности: Функция f называется непрерывной в точке a слева (справа), если выполнены следующие три условия:

а) $a\in D_f$;

б) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)<\infty$ (предел функции f в точке a существует и конечен); ($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)<\infty$);

в) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a)$; ($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$).

О п р е д е л е н и е. Функция называется **непрерывной на промежутке**, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

П р и м е р ы

5. $f(x)\equiv k,\ k\in R$ – ***непрерывна в любой точке*** $a\in R$.

6. $f(x)=x$ – ***непрерывна в любой точке*** $a\in R$.

7. $f(x)=\sqrt{x}$ – ***непрерывна в любой точке*** $a>0$, ***в точке*** 0 ***непрерывна справа.***

Свойства непрерывности

(следуют из свойств предела функции в точке)

***Теорема*. Сумма, произведение и частное непрерывных функций**.

Если функции f и g непрерывны в точке a, то и функции $f+g$, $f\cdot g$ непрерывны в этой точке. Если, кроме того, $g(a)\neq 0$, то функция f/g также непрерывна в точке a.

***Теорема* о непрерывности рациональной функции**.

Рациональная функция ($f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),Q(x)$ – многочлены) *непрерывна на своей области определения.* (Если $y=x$ непрерывна, то и $y=x^n$ непрерывна, и $P(x)=\sum\alpha_n x^n$ непрерывна, и $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна).

• Если $f(a)\neq 0$ и f непрерывна в точке a, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком $f(a)$.

• Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $g(x)$ непрерывна в точке b. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big)=g(b)$.

• Пусть функция f непрерывна в точке a, функция g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда композиция $g\circ f$ (т.е. $g\big(f(x)\big)$) непрерывна в точке a.

Примеры

Вычислить пределы:

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-3x^2-1\right)$.

□ $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-3x^2-1\right)=2^3-3\cdot 2^2-1=-5$.

Обоснование: рассмотрим функцию $f(x)=x^3-3x^2-1$; f непрерывна на R как рациональная; следовательно, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$.

□ Прежде чем приступать к преобразованиям, проверьте, присутствует ли в данном примере неопределенность: ведь если при подстановке предельной точки получается, например, отношение конечных чисел (знаменатель отличен от нуля), то можно сразу воспользоваться теоремой о пределе частного!

В данном примере при подстановке числа -1 получаем неопределенность типа $0/0$, так что придется проводить преобразования (еще встречаются, например, неопределенности типа ∞/∞, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$).

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=1+1+1=3.$$

Обоснование: при $x\neq -1$ функция $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ совпадает с функцией $g(x)=x^2-x+1$, а так как понятие предела не включает рассмотрение значения функции в предельной точке, то и пределы f и g в точке -1 совпадают, а функция g определена в точке -1 и непрерывна как рациональная, и, следовательно, вместо предела можно считать значение $g(-1)$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

□ Используем прием домножения (и деления) на сопряженное с целью избавления от иррациональности, несущей неопределенность.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}.$$

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x+6}-3}$.

□ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x+6}-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)}=$

$$=\lim_{x\to 3}(x-2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)=(3-2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)=6.$$

Обоснование: теорема о пределе произведения (или теорема о непрерывности произведения непрерывных функций).

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

□ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1\right)}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+\ldots+1}{x^{n-1}+\ldots+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\ldots+1}{1+\ldots+1}=\dfrac{m}{n}.$

При подстановке $x=1$ в числителе – m слагаемых, в знаменателе – n слагаемых (см. формулу сокращенного умножения $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}\right)$.

Найти промежутки непрерывности функций:

13. $f(x)=\dfrac{x^5-7x^4+2}{x^3-8}$.

□ f непрерывна как рациональная на своей области определения.

$$D_f:\ x^3\neq 8;\ x\neq 2.$$

Ответ: f непрерывна на $R\setminus\{2\}$.

14. $g(x)=\dfrac{x^5}{x^3-8}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

□ g – разность двух функций: рациональной функции $y=\dfrac{x^5}{x^3-8}$ с областью определения $R\setminus\{2\}$ и функции $y=1/\sqrt{x}$ – отношения непрерывных на $(0;\infty)$ функций.

$$D_g=(0;2)\cup(2;\infty).$$

Ответ: g непрерывна на $(0;2)\cup(2;\infty)$.

15. $h(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)}$.

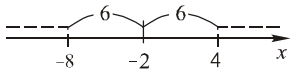
□ h – отношение непрерывных функций при $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)\neq 0$, т.е. при $x\neq-\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

$$D_h=R\setminus\left\{\frac{5\pi}{14}+\pi k\mid k\in Z\right\}.$$

Ответ: h непрерывна на $R\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{14}+\pi k\mid k\in Z\right\}$.

16. $p(x)=\sqrt{|x+2|-6}$.

□ $y=|x+2|-6$ – непрерывная функция на R. p – композиция функций $y=|x+2|-6$ и $y=\sqrt{x}$, причем $y=\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;\infty)$, а в точке $x=0$ непрерывна справа. Тогда по теореме о непрерывности композиции функций p непрерывна на множестве $|x+2|-6>0$ и односторонне непрерывна при $|x+2|-6=0$.



Ответ: p непрерывна на $(-\infty;-8)\cup(4;\infty)$; в точке -8 функция непрерывна слева, в точке 4 – справа.

17. $q(x)=\log_5(x-3)$.

□ q непрерывна на своей области определения.

Ответ: q непрерывна на $(3;\infty)$.

18. $s(x)=\log_x 2-\dfrac{1}{x^2-4}$.

□ На основании теоремы о непрерывности частного непрерывных функций s непрерывна на D_s.

Ответ: s непрерывна на $(0;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$.

19. $v(x)=\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^{-\operatorname{tg}x}}{2x}$.

□ По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций v непрерывна на D_v: $\cos x\neq 0, x\neq 0$.

Ответ: v непрерывна на $R\setminus\left\{0;\dfrac{\pi}{2}+\pi m\mid m\in Z\right\}$.

Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции. Метод интервалов

Теорема. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ (в концах отрезка достаточно односторонней непрерывности) и принимает в точках a и b значения разных знаков. Тогда она обращается в 0 хотя бы в одной точке из этого отрезка, причем если f монотонна на $[a;b]$, то она обращается в 0 в единственной точке этого отрезка.*

Теорема. *Непрерывная функция на отрезке (в концах достаточно односторонней непрерывности) достигает своего наибольшего и наименьшего значений и принимает все промежуточные значения.*

Теорема. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ (в концах отрезка достаточно односторонней непрерывности) и не имеет корней на этом отрезке, то все значения f на $[a;b]$ одного знака.*

Замечание. Данные теоремы дают обоснование методу интервалов для решения неравенств.

Действительно, знак функции может поменяться только в точках, где нарушается условие непрерывности, или в корнях функции. Метод интервалов как раз в том и состоит, чтобы сначала найти все такие точки, где возможна перемена знака, а затем расставить знаки функции в образовавшихся промежутках.

Ягубов Р.Ф.

Примеры

Решить неравенства методом интервалов:

20. $\dfrac{1}{x-2}<1$.

□ На первый раз решаем с объяснением всех действий.

Метод интервалов обычно применяют при решении неравенств, в которых некоторая функция (с конечным числом точек разрыва) сравнивается с 0. (Подумайте, а можно ли решать методом интервалов неравенства, где сравнение идет с ненулевым числом?)

Итак, переносим число в левую часть неравенства и вводим функцию

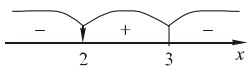
$$f(x)=\frac{1}{x-2}-1=\frac{1-x+2}{x-2}=\frac{3-x}{x-2};$$

решаем неравенство $f(x)<0$ методом интервалов.

1. $D_f=R\setminus\{2\}$; f непрерывна на D_f. Это обязательный комментарий, особенно для функций, не являющихся рациональными, т.е. для тех, для которых метод интервалов не входит в стандартные школьные учебники!)

2. Найдем корни уравнения $f(x)=0$: $\dfrac{3-x}{x-2}=0;\quad x=3.$

3. Изобразим на числовой прямой все результаты предыдущих действий (масштаб соблюдать не обязательно, важен порядок взаимного расположения на прямой!). Числовая прямая при этом разбивается на промежутки.



4. В каждом из полученных интервалов нужно поставить знак (так как на нем нет ни точек разрыва функции, ни корней, и, следовательно, значения во всех точках интервала одного знака). Делать это можно двумя способами:

а) универсальный – «тестирование по произвольной (не граничной) точке»;

б) определяем знак в одном из промежутков либо способом а), либо по знаку предела функции (обычно в одном из крайних промежутков), либо (для рациональных функций) по знаку отношения коэффициентов при старших степенях переменной в числителе и в знаменателе – он совпадает со знаком, стоящим в крайнем правом промежутке (на $+\infty$); далее «шагаем» через отмеченные точки из интервала в интервал и определяем, меняется ли при этом знак функции.

Осветим некоторые типичные случаи.

Знак при переходе через точку a **меняется**, если $f(x)=(x-a)^{2k+1}g(x)$ или $f(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a)^{2k+1}}$, где $k\in Z$, $x=a$ не является ни корнем, ни точкой разрыва функции g. Иногда говорят, что $x=a$ – корень нечетной кратности числителя или знаменателя функции f (хотя для функций, не являющихся рациональными, это не очень корректно). Пример: $y=x^3,\ a=0$.

Знак при переходе через точку a **не меняется**, если $f(x)=(x-a)^{2k}g(x)$ или $f(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a)^{2k}}$, где $k\in Z$, $x=a$ не является ни корнем, ни точкой разрыва функции g (аналогично, $x=a$ – корень четной кратности числителя или знаменателя функции f, с той же оговоркой). Пример: $y=x^2,\ a=0$.

Знак при переходе через точку a **не меняется**, если $f(x)=|x-a|g(x)$ или $f(x)=\dfrac{g(x)}{|x-a|}$, если $f(x)=\sqrt[2k]{h(x)}g(x)$ или $f(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt[2k]{h(x)}}$, где $k\in Z$, $x=a$ – корень h, $x=a$ не является ни корнем, ни точкой разрыва функции g.

Совет по оформлению: «для приемной комиссии» записывайте так, как будто вы честно определяли знак каждого промежутка по знаку значения в произвольно взятой конкретной точке, так как этот способ не требует дополнительных объяснений. Кроме того, вы же не обязаны предъявлять (якобы) найденное значение! Можно ограничиться указанием его знака.

Возвращаемся к решению заданного неравенства. Итак, «для комиссии»:

$$f(1000000)<0,\ f(2{,}5)>0,\ f(-1)<0.$$

Внимательно смотрим на знак неравенства и выписываем ответ.

Не забудьте: в случае нестрогого неравенства выносим в ответ не только промежутки с соответствующими знаками, но и корни функции! Могут образоваться изолированные точки. Если на экзамене вы получили ответ без изолированных точек или промежутков, разделенных точкой разрыва, проверьте еще раз! Помните: самой грубой ошибкой при решении примеров методом интервалов является вынесение в ответ точек, не входящих в область определения функции!

В нашем случае в неравенстве знак «$<$», т.е. в ответ выписываем промежутки с минусами, и никакие граничные точки не включаем – все скобки круглые.

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

Замечание. Конечно, пример 20 на экзамене так решать не нужно, он слишком прост. Неравенство $\dfrac{3-x}{x-2}<0$ равносильно неравенству $(3-x)(x-2)<0$. Ответ «больше большего, меньше меньшего»: $x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

Следующие примеры рассматриваем не столь подробно, комментарии будут в скобках.

21. $\dfrac{\left(x^{200}+5{,}5x^2+\dfrac{1}{3}\right)(2x-3)^2x^5\left(x^2+17x-18\right)\sqrt{x^3+8}}{|x-5|\left(x^2-9\right)}\ge 0$.

□ $f(x)=\dfrac{\left(x^{200}+5{,}5x^2+\dfrac{1}{3}\right)(2x-3)^2x^5\left(x^2+17x-18\right)\sqrt{x^3+8}}{|x-5|\left(x^2-9\right)}$.

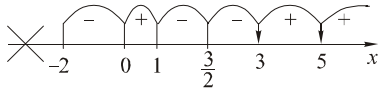
1. $D_f:\begin{cases}x^3+8\ge 0\\ x^2\ne 9\\ x\ne 5\end{cases}$ $D_f=[-2;3)\cup(3;5)\cup(5;\infty)$.

f непрерывна на D_f как отношение непрерывных функций; решим неравенство $f(x)\ge 0$ методом интервалов.

2. $f(x)=0$: $\dfrac{\left(x^{200}+5{,}5x^2+\dfrac{1}{3}\right)(2x-3)^2x^5\left(x^2+17x-18\right)\sqrt{x^3+8}}{|x-5|\left(x^2-9\right)}=0$;

$$x_1=\frac{3}{2};\ x_2=0;\ x_3=1;\ x_4=-18\notin D_f;\ x_5=-2.$$

(Первая скобка числителя положительна $\forall x\in R$, так что на знак функции она не влияет.)

3. 

$f(-1)<0;\ f(0{,}3)>0;\ f(1{,}1)<0;\ f(2)<0;\ f(4)>0;\ f(100)>0$.

(На самом деле рассуждения были таковы: $f(10^{95})>0;$ первая скобка числителя, модуль, вторая степень и квадратный корень на знак не влияют; знак меняется только при переходе через точки 3, 1, 0.)

Ответ: $[0;1]\cup(3;5)\cup(5;\infty)\cup\{-2;3/2\}$.

22. $\dfrac{2^{2x}-2^{x+2}-5}{x^3+1}>0$.

□ $f(x)=\dfrac{2^{2x}-2^{x+2}-5}{x^3+1}$.

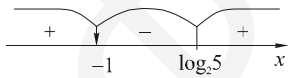
1. $D_f=R\setminus\{-1\}$. f непрерывна на D_f как отношение непрерывных функций; решим неравенство $f(x)>0$ методом интервалов.

2. $f(x)=0;\ \dfrac{2^{2x}-2^{x+2}-5}{x^3+1}=0;\ 2^{2x}-4\cdot 2^x-5=0$

$2^x=t>0$,

$t^2-4t-5=0$,

$t=-1<0;\ t=5;\ x=\log_2 5$.

3. 

$f(-50)>0;\ f(0)<0;\ f(100)>0$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(\log_2 5;\infty)$.

«**Круговой» метод интервалов** можно применять для функций, имеющих период 2π (не обязательно это должен быть наименьший период!). Действия остаются теми же, но вместо числовой прямой используется тригонометрическая окружность.

Примеры

23. ***Решить неравенство*** $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)(1-\cos x)\operatorname{tg}2x\le 0$ ***методом интервалов.***

□ $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)(1-\cos x)\operatorname{tg}2x$.

1. $D_f:\ 2x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ x\ne\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$.

f непрерывна на D_f; решим неравенство $f(x)\le 0$ методом интервалов.

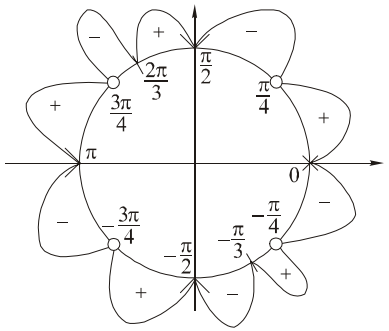
$f(x)=0;\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)(1-\cos x)\operatorname{tg}2x=0$.

2. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0,$ $\cos x=1,$ $\operatorname{tg}2x=0,$

$x+\dfrac{\pi}{3}=\pi k,\ k\in Z,$ $x=2\pi m,\ m\in Z,$ $2x=\pi l,\ l\in Z,$

$x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,$ $x=\dfrac{\pi l}{2}.$

3. Заметим, что удобно отмечать особыми символами точки, в которых знак не меняется, т.е. либо это корни четного количества множителей, либо корни не меняющего знак множителя (например, $\forall x\in R\ \ 1-\cos x\ge 0$; можно записать $1-\cos x=2\sin^2(x/2)\ge 0$). Хотя в данном случае точки $2\pi m$ – точки перемены знака, так как $\operatorname{tg}2x$ меняет здесь знак. Вообще, при расстановке знаков тригонометрических функций будьте максимально аккуратны. Теперь картинка:



«Для комиссии»:

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$; $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)>0$;

$f\left(\frac{13\pi}{18}\right)<0$; $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)>0$; $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)<0$;

$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)>0$; $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)<0$; $f\left(-\frac{5\pi}{18}\right)>0$;

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<0$.

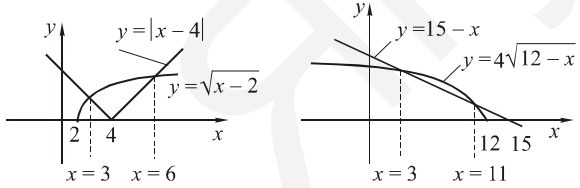
Ответ: $\left[-\pi+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$

$\cup\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Метод замены неравенства на эквивалентное («обобщенный» метод интервалов). Иногда удобно вместо «честного» решения неравенства методом интервалов заменить его на более простое (рациональное) неравенство. Продемонстрируем на примере.

24. ***Решить неравенство*** $\frac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{12-x}+x-15}\le 0$.

□ Отметим, что $x\in[2;12]$. Попробуем определить точки разрыва и точки перемены знака функции $f(x)=\frac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{12-x}+x-15}$, а затем найдем рациональную функцию с теми же знаками, т.е. с аналогичными точками разрыва и теми же корнями, а для этого изобразим графики функций: $g(x)=|x-4|$, $h(x)=\sqrt{x-2}$, $s(x)=4\sqrt{12-x}$, $p(x)=15-x$. Найдем точки пересечения, отслеживая взаимное расположение графиков.



Итак, выражение $|x-4|-\sqrt{x-2}$ следует заменить на многочлен с корнями 3 и 6 (1-й кратности каждый, так как числитель в точках 3 и 6 меняет знак), а выражение $4\sqrt{12-x}+x-15$ – на многочлен с корнями 3 и 11 (1-й кратности каждый).

Рациональная функция $t(x)=\frac{(x-3)(x-6)}{(x-3)(x-11)}$ имеет те же корни (нужной кратности) и те же точки разрыва, что и f. Значит ли это, что знаки функций t и f совпадают (на отрезке $[2;12]$!)? Почти, т.е. либо совпадают, либо противоположны. Определим это по любой точке.

$$f(4)=\frac{|4-4|-\sqrt{4-2}}{4\sqrt{12-4}+4-15}=\frac{-\sqrt{2}}{4\sqrt{8}-11}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{128}-\sqrt{121}}<0;$$

$$t(4)=\frac{(4-3)(4-6)}{(4-3)(4-11)}=\frac{-2}{-7}>0.$$

Знаки в точке 4, а значит, и во всех остальных точках области определения, противоположны.

Вместо исходного неравенства будем решать неравенство $-t(x)\le 0$ на отрезке $[2;12]$.

$-\frac{(x-3)(x-6)}{(x-3)(x-11)}\le 0$; $\frac{x-6}{x-11}\ge 0$, $x\ne 3$. Подробное решение опускаем.

Ответ: $[2;3)\cup(3;6]\cup[11;12]$.

П р и м е р приближенного решения уравнения.

25. ***Доказать, что уравнение*** $x^3-3x+1=0$ ***имеет корень на отрезке*** $[0;1]$. ***Найти его с точностью до*** $0{,}1$.

□ Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-3x+1$. f непрерывна на R, а следовательно, и на $[0;1]$. $f(0)=1>0, f(1)=-1<0$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке $[0;1]$ есть хотя бы один корень f.

Разобьем отрезок $[0;1]$ на отрезки длиной 0,2 и аналогично предыдущим рассуждениям определим, на каком из них есть корень функции. Начнем с левого конца отрезка.

x	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
Знак $f(x)$	+	+	–	–	–	–

Перемена знака произошла на отрезке $[1/5;2/5]$.

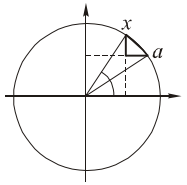
Ответ: $x\approx 0{,}3$.

Замечание. Можно было действовать методом половинного деления отрезка, т.е. сначала определить, произошла ли перемена знака на первой его половине или на второй, затем разбить ее пополам и т.д.

Глава 12. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ПЕРВЫЙ «ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ» ПРЕДЕЛ

Непрерывность тригонометрических функций

Докажем, что функция $y=\sin x$ непрерывна в произвольно взятой точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, т.е. $\sin x\to\sin a$ при $x\to a$, т.е. $|\sin x-\sin a|\to 0$ при $|x-a|\to 0$.



Изобразим «универсальную тригонометрическую шпаргалку» – тригонометрическую окружность.

$$0\le|\sin x-\sin a|=h\le c\le l=|x-a|;\quad 0\le|\sin x-\sin a|\le|x-a|$$
$$\downarrow x\to a$$
$$0$$

По «лемме о двух милиционерах» $\lim\limits_{x\to a}|\sin x-\sin a|=0$, что и доказывает непрерывность синуса.

Непрерывность функции $y=\cos x$ можно доказать аналогично, а можно воспользоваться формулой приведения $\left(\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$ и теоремой о непрерывности композиции.

Функции $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ непрерывны на области определения как частное непрерывных функций.

Функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$ непрерывны на своей области определения как обратные к непрерывным функциям (соответствующим тригонометрическим функциям на ограниченной области определения).

Первый «замечательный» предел

Здесь мы рассмотрим один из важных пределов, который не случайно имеет имя собственное – «первый замечательный».

Известно, что $y=\sin x$ непрерывна везде, а следовательно, и в точке 0. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Раскроем неопределенность $\frac{\sin x}{x}$ типа $\frac{0}{0}$ при $x\to 0$.

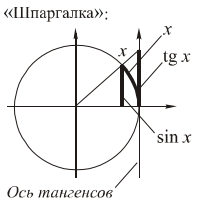
Лемма. $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$ при $x\in\left(0;\pi/2\right)$.

Доказательство. Обращаем внимание: $y=\cos x$ и $y=\frac{\sin x}{x}$ – четные функции! Поэтому достаточно доказать утверждение для $x>0$.

Сошлемся на геометрическую интерпретацию (хотя строго это не доказано):

$$\sin x\le x\le\operatorname{tg}x.$$

«Шпаргалка»:



Разделим все части неравенства на положительную величину $\sin x$:

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$$
$$\downarrow x\to 0$$
$$1$$
$$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x};$$

Применим лемму «о двух милиционерах»: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$.

Замечание. Полезно сразу выделить еще серию простых пределов, легко получаемых из первого «замечательного» (докажите!):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;\quad\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1;\quad\lim_{x\to 0}\left(x\operatorname{ctg}x\right)=1;\quad\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1;\quad\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1;\quad\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg}x}=1.$$

Примеры

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}$.

$\square$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x\cdot 4x\cdot 7}{4x\cdot\sin 7x\cdot 7}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$.

□ $\lim\limits_{t=\pi-x\to 0}\dfrac{\sin\left(5\left(\pi-t\right)\right)}{\sin\left(8\left(\pi-t\right)\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi-5t\right)}{\sin\left(-8t\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 5t}{-\sin 8t}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 5t\cdot 5\cdot 8t}{5t\cdot 8\sin 8t}=-\dfrac{5}{8}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 4}=\dfrac{1}{2}$. Или: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{x^2\left(1+\cos x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2\left(1+\cos x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\dfrac{4}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4}=1\cdot 0=0$.

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}$.

□ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{tg}\left(x-a\right)\left(1+\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}a\right)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\left(x-a\right)}{x-a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1+\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}a}{\cos\left(x-a\right)}=1\cdot\dfrac{1+\mathrm{tg}^2 a}{1}=\dfrac{1}{\cos^2 a}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(1-x\right)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

□ $\lim\limits_{t=1-x\to 0}\left(t\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi\left(1-t\right)}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(t\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right)\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(t\mathrm{ctg}\dfrac{t}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}\cdot 2}{\sin\dfrac{t}{2}}=2$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(a+2x\right)-2\sin\left(x+a\right)+\sin a}{x^2}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\left(a+2x\right)-\sin\left(x+a\right)\right)-\left(\sin\left(x+a\right)-\sin a\right)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\left(\cos\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\right)}{2\cdot\dfrac{x}{2}x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(a+\dfrac{3x}{2}\right)-\cos\left(a+\dfrac{x}{2}\right)}{x}=$

$=-1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(a+x\right)\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(a+x\right)=-\sin a$.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

□ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\cdot 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Можно ли доопределить функцию до непрерывности в точке 0***?***

10. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{x}$.

□ По определению, функция непрерывна в точке, если предел справа в этой точке совпадает с пределом слева и со значением. Доопределить функцию f в точке a до непрерывности – это значит найти новую функцию f_1, отличающуюся от данной только значением в точке a (или вообще наличием этого значения, т.е. исходная функция в точке не определена, а новая имеет какое-либо значение) и являющуюся **непрерывной** в данной точке. При этом часто не вводят новую функцию, а говорят так: «положим значение функции в данной точке равным числу ...».

Следовательно, доопределить функцию f в точке a до непрерывности можно тогда и только тогда, когда $x=a$ – точка устранимого разрыва функции f.

Лутфуллин Р.Ф.

$$\lim_{x\to 0\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{\sin 5x+\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}+\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=5+3=8\,.$$

Чтобы доопределить функцию f до непрерывности в 0, положим значение функции в точке 0 равным 8. Таким образом,

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ 8, & x=0.\end{cases}$$

11. $f(x)=\dfrac{\cos 5x+\cos 3x}{x}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x+\cos 3x)=1+1=2$; x – б.м. $(x\to 0)$.

Тогда $f(x)=\dfrac{\cos 5x+\cos 3x}{x}$ – б.б. $(x\to 0)$.

Следовательно, функцию $f(x)$ нельзя доопределить в точке 0 до непрерывности.

12. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$.

(см. пример 3).

Доопределим функцию f до непрерывности в точке 0, положив значение $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Глава 13. (в) ЧИСЛО *e*. ВТОРОЙ «ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ» ПРЕДЕЛ

Второй «замечательный» предел

О п р е д е л е н и е. ***Числом e*** называется $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при $x\geq 1$ выполняется неравенство:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\frac{1}{1+\frac{1}{[x]+1}}}_{\downarrow e\ (x\to+\infty)}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=$$

$$=\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)}_{\downarrow e\ (x\to+\infty)}.$$

Из свойств предела следует, что и предел средней части неравенства при $x\to+\infty$ – тоже число e, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t=-x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{(-t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e\,.$$

(*) $[x]$ – целая часть числа x.

ЯгубовРФ

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

Сделаем замену переменной: $y=\dfrac{1}{x}$. Если $x\to\infty$, то $y\to 0$, тогда

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e}$$

Прологарифмируем обе части предыдущего равенства (можно логарифмировать под знаком предела, так как $y=\ln x$ – непрерывная на области определения функция).

$$\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=1,\ \text{т.е. } \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1}$$

Сделаем еще одну замену переменной: $t=\ln(1+y)$.

Если $y\to 0$, то $t\to 0$. Получаем предел: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{e^{t}-1}=1$. «Перевернем»: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1$.

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=1}$$

Вычислим еще один предел, пользуясь формулой перехода к новому основанию в логарифмах (до сих пор в роли основания было число e, а теперь будет произвольное число $a>0$).

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{\ln a\cdot y}=\frac{1}{\ln a}.$$

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}=\frac{1}{\ln a}}$$

Аналогично получим предел для показательной функции:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}=\lim_{t=\log_a(1+y)\to 0}\frac{t}{a^{t}-1}=\frac{1}{\ln a};\quad \lim_{t\to 0}\frac{a^{t}-1}{t}=\ln a.$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{a^{t}-1}{t}=\ln a}$$

Выделенные в рамочки п р е д е л ы о ч е н ь с о в е т у е м **п о м н и т ь** !

П р и м е р ы

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

☐ Прежде чем проводить какие-либо преобразования, определим для себя тип предела, формально «подставив» предельную точку: $(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$. Пределы такого типа сводятся ко второму «замечательному» пределу. В процессе вычисления воспользуемся следующим свойством:

Пусть $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a}v(x)=B$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}u(x)^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}=A^{B}$.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{2}=\left(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{2}=e^{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^{5}+3x-2}{4x^{5}+x-1}\right)^{\frac{x^{6}}{x^{2}-1}}$.

☐ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{5}+3x-2}{4x^{5}+x-1}=1;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{6}}{x^{2}-1}=\infty$. Тип предела – 1^{∞}.

Для вычисления предела нужно выделить в основании степени 1, т.е. «подогнать» выражение к стандартному виду второго «замечательного» предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^{5}+3x-2}{4x^{5}+x-1}\right)^{\frac{x^{6}}{x^{2}-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^{5}+x-1+2x-1}{4x^{5}+x-1}\right)^{\frac{x^{6}}{x^{2}-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{4x^{5}+x-1}\right)^{\frac{4x^{5}+x-1}{2x-1}\cdot\frac{(2x-1)\cdot x^{6}}{(4x^{5}+x-1)(x^{2}-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)\cdot x^{6}}{(4x^{5}+x-1)(x^{2}-1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{7}+\ldots}{4x^{7}+\ldots}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^{5}+3x-2}{2x^{5}+x-1}\right)^{\frac{x^{6}}{x^{2}-1}}$.

☐ Тип предела – $2^{+\infty}$. Предел не нуждается в сведении к «замечательным».

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^{5}+3x-2}{2x^{5}+x-1}\right)^{\frac{x^{6}}{x^{2}-1}}=+\infty.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^5+3x-2}{4x^5+x-1}\right)^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

□ Тип предела – 1^1.

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5+3x-2}{4x^5+x-1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}}=1^1=1.$$

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{4x^5+3x-2}{4x^5+x-1}\right)^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

□ Тип предела – 2^0.

$$\left(\lim_{x\to0}\frac{4x^5+3x-2}{4x^5+x-1}\right)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2-1}}=2^0=1.$$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

□ $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)=2-1=1;\ \lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}=\infty$.

Запись математически **не очень корректна**, так как $\operatorname{tg}(\pi/2)$ не определен, но это нужно только для определения типа предела! Запись решения начинается со следующей строки. Тип предела – 1^∞.

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}=\lim_{t=\frac{x}{a}\to1}(2-t)^{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\lim_{u=(1-t)\to0}(1+u)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-u)}=\lim_{u\to0}(1+u)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{u\to0}(1+u)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2}}=\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2}}}=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{\pi u}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}}}=e^{1\cdot\lim\limits_{u\to0}\frac{2\cos\frac{\pi u}{2}}{\pi}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

□ Тип предела – $0/0$. Сведем к одному из выделенных ранее пределов. (Решающий задает себе вопрос: «На что это похоже? Какие ассоциации это задание вызывает?») Итак:

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{t=(x-a)\to0}\frac{e^{t+a}-e^a}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^a\left(e^t-1\right)}{t}=e^a\cdot1=e^a.$$

8. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$.

□ Тип предела – $0/0$.

$$\lim_{t=(x-a)\to0}\frac{\ln\frac{t+a}{a}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{\frac{t}{a}a}=\frac{1}{a}.$$

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2x}$.

□ Тип предела – 1^∞.

$$\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x}{\sin^2x}}=e.$$

10. $\lim\limits_{x\to1}\left(\left(\log_x2\right)(x-1)\right)$.

□ Отметим, что $\log_x2=\dfrac{1}{\log_2x}$. Тогда $\left(\log_x2\right)(x-1)=\dfrac{x-1}{\log_2x}$, таким образом, тип предела – $0/0$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\log_2x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\ln2}{\ln x}=\lim_{t=(x-1)\to0}\frac{t\ln2}{\ln(1+t)}=\ln2.$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_3\left(x^4+2x+1\right)}{\ln\left(x^5-x\right)}$

□ Тип предела – ∞/∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^4+2x+1\right)}{\ln3\ln\left(x^5-x\right)}=\frac{1}{\ln3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^4\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)\right)}{\ln\left(x^5\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{1}{\ln3}\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x+\ln\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}{5\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{1}{\ln3}\frac{4+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}{\ln x}}{5+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}{\ln x}}=\frac{4}{5\ln3}.$$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\sin3x}}{\operatorname{arctg}x}$.

□ Тип предела – $0/0$.

1-й с п о с о б.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin3x}}{\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin3x}\left(e^{\sin x-\sin3x}-1\right)}{\operatorname{arctg}x}=$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\sin3x}\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{\sin x-\sin3x}-1\right)(\sin x-\sin3x)x}{(\sin x-\sin3x)\operatorname{arctg}x\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin3x}\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x-\sin3x}-1}{\sin x-\sin3x}\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{arctg}x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin3x}{x}=$$

$$1\cdot1\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x\cos2x}{x}=-2.$$

2-й с п о с о б.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin 3x}}{\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{arctg}x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)\sin x\cdot x}{\sin x\cdot x\operatorname{arctg}x}-$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin 3x}-1\right)\sin 3x\cdot x\cdot 3}{\sin 3x\cdot 3x\cdot\operatorname{arctg}x}=1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1\cdot 3=1-3=-2\,.$$

Сравнение роста показательной, логарифмической и степенной функций

Имеет место следующий факт.

Пусть $a>1$, n – некоторое (произвольное, как угодно большое) натуральное число. Тогда при $x\to+\infty$ показательная функция a^x растет быстрее степенной функции x^n, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=+\infty}$$

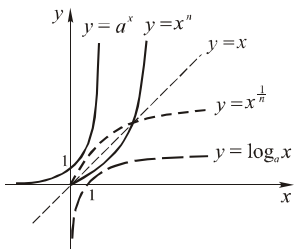
Произведем замену $t=a^x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{t=a^x\to+\infty}\frac{t}{\log_a{}^n t}=\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1/n}}{\log_a t}\right)^n=+\infty\,,\ \text{т.е.}\ \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/n}}{\log_a x}=+\infty}$$

Получаем еще утверждение:

Пусть $a>1$, n – некоторое (произвольное, как угодно большое) натуральное число. Тогда при $x\to+\infty$ логарифмическая функция $\log_a x$ растет медленнее степенной функции $x^{1/n}$.

Итак: на «+» бесконечности из трех функций – показательной с любым основанием больше 1, степенной с любым положительным показателем и логарифмической с любым основанием больше 1 – можно указать самую **быстрорастущую** – это п о к а з а т е л ь н а я, и самую **медленнорастущую** – это л о г а р и ф м и ч е с к а я.



Для наглядности можно представить себе графики следующих функций: показательная $y=a^x, a>1$; обратная к ней – логарифмическая $y=\log_a x$; степенная $y=x^n$, $n\in Z$; обратная к ней степенная $y=x^{1/n}$.

Примеры

Вычислить пределы:

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^7-x+\sqrt{x}}{2^x}$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x^7}{2^x}-\frac{x}{2^x}+\frac{\sqrt{x}}{2^x}}{1}=0$.

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5^x\cdot x^3\right)$.

□ $\lim\limits_{t=-x\to+\infty}\left(5^{-t}\cdot(-t)^3\right)=-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{5^t}=0$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^x\cdot x^3\right)$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5^x\cdot x^3\right)=+\infty$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5^x\cdot x^3\right)$.

□ $\lim\limits_{x\to 0}\left(5^x\cdot x^3\right)=1\cdot 0=0$.

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2^{-2x}}{1-2^{-2x}}=1$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x^2}-x^4}{2^{x^2}+x^4}$.

□ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x^2}-x^4}{2^{x^2}+x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{x^4}{2^{x^2}}}{1+\frac{x^4}{2^{x^2}}}=1$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2 x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2 x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_{0,2} x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_{0,2} x}{\sqrt[3]{x}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln 5\cdot\sqrt[3]{x}}=0$.

24. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\log_2 x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ $\lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\dfrac{\log_2(1/t)}{\sqrt[3]{(1/t)}}=$

$=-\lim\limits_{t\to+\infty}(\sqrt[3]{t}\cdot\log_2 t)=-\infty$.

25. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\log_{0,2} x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ $-\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\log_5 x}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$.

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt[7]{x}+1}$.

□

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt[14]{x}}\right)^3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x}+1}=0^3\cdot 1=0.$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{\ln x}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

28. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

□ $\lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{t}}{t}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$.

29. $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln^{100} x$.

□ $\lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\dfrac{\ln^{100}\frac{1}{t}}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{\ln t}{\sqrt[100]{t}}\right)^{100}=0$.

30. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{100}\ln x$.

□ $\lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to+\infty} \dfrac{-\ln t}{t^{100}} = 0$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin x}}{x}$.

□ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sin x}}{x} = 0$, так как $y = e^{\sin x} \in \left[e^{-1}; e\right]$ – ограниченная функция, $y = 1/x$ – бесконечно малая при $x \to \infty$.

32. ***Исследовать функцию*** $y = xe^{-x}$ ***на непрерывность, определить характер точек разрыва, найти предел на бесконечности и все асимптоты графика.***[*)]

□ $y = f(x) = xe^{-x}$. $D_f = R$. f непрерывна на R.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}\right) = -\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0\ .$$

Асимптоты: вертикальных нет; $y = 0$ – правосторонняя горизонтальная. Проверим, есть ли левосторонняя наклонная асимптота.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, т.е. наклонных асимптот нет.

33. ***Исследовать функцию*** $y = x\ln x$ ***на непрерывность, определить характер точек разрыва, найти предел на бесконечности и все асимптоты графика.***

□ $y = g(x) = x\ln x$.

$D_g = (0;+\infty)$. g непрерывна на D_g . $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x) = +\infty$;

$$\lim_{x\to0+0}(x\ln x) = \lim_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\frac{-\ln t}{t} = 0\ .$$

Асимптоты: вертикальных и горизонтальных нет;

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x} = +\infty$, т.е. наклонных асимптот тоже нет.

34. ***Исследовать функцию*** $y = \cos x - \ln\cos x$ ***на непрерывность, определить характер точек разрыва, найти предел на бесконечности и все асимптоты графика.***

□ $y = h(x) = \cos x - \ln\cos x$.

$D_h : \cos x > 0;\quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+2\pi n)+0}(\cos x - \ln\cos x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-0}\left(\cos x - \ln\cos x\right) = -(-\infty) = +\infty\ .$$

[*)] Ознакомьтесь с темой «Асимптоты» на с. 232.

Асимптоты: $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ – односторонние вертикальные асимптоты.

Наклонных и горизонтальных асимптот нет, так как функция периодическая.

35. ***Исследовать функцию*** $y = x^2 2^{1/x}$ ***на непрерывность, определить характер точек разрыва, найти предел на бесконечности и все асимптоты графика.***

□ $y = s(x) = x^2 2^{1/x}$.

$D_s = R \setminus \{0\}$. s непрерывна на D_s . $\lim\limits_{x\to0-0}(x^2\cdot 2^{1/x}) = 0\cdot 0 = 0$;

$\lim\limits_{x\to0+0}(x^2 2^{1/x}) = \lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to+\infty}\dfrac{2^t}{t^2} = +\infty$; $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2 2^{1/x}) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x\cdot 2^{1/x}) = \pm\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{1/x} = 2^0 = 1$.

Асимптоты: $x = 0$ – правосторонняя вертикальная. Других асимптот нет.

Ягубов.рф

Глава 14. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Вертикальные асимптоты

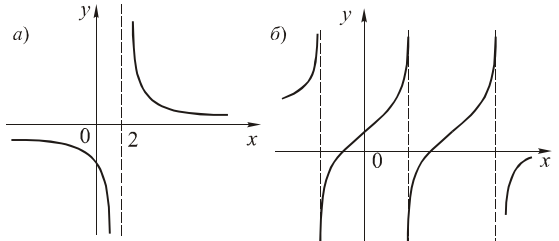
Вертикальные асимптоты возникают в том случае, если в конечной точке функция имеет бесконечный предел.

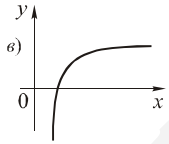
О п р е д е л е н и е. Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой графика функции*** f, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Если только $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется соответственно *левосторонней* или *правосторонней вертикальной асимптотой.*

П р и м е р ы

1. $y=\dfrac{1}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{1}{x-2}=\pm\infty$; $x=2$ – (двусторонняя) вертикальная асимптота (см. рис. *а*).





2. $y=\operatorname{tg}x$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ – (двусторонние) вертикальные асимптоты (см. рис. *б*).

3. $y=\log_2 x$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_2 x=-\infty$; $x=0$ – правосторонняя вертикальная асимптота (см. рис. *в*).

Кривая $y=g(x)$ называется ***асимптотой графика функции*** f, если $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$, т.е. $f(x)=g(x)+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to\infty$.

4. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$. Криволинейная асимптота – $y=x^2$. Таким образом, на бесконечности график функции приближается к параболе $y=x^2$.

Далее мы будем рассматривать только прямолинейные асимптоты.

Горизонтальные асимптоты

Горизонтальные асимптоты возникают в том случае, если на бесконечности функция имеет конечный предел.

О п р е д е л е н и е. Прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой графика функции*** f, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b<\infty$.

Если только $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ называется соответственно *левосторонней* или *правосторонней горизонтальной асимптотой.*

П р и м е р ы

5. $y=\dfrac{x^5-4x^4+3x-2}{2-x^5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^4+3x-2}{2-x^5}=-1$; $y=-1$ – (двусторонняя) горизонтальная асимптота.

6. $y=\sin\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t=\frac{1}{x}\to 0}\sin t=\sin 0=0$; $y=0$ – (двусторонняя) горизонтальная асимптота.

7. $y=3^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$; $y=0$ – левосторонняя горизонтальная асимптота.

Наклонные асимптоты

О п р е д е л е н и е. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой графика функции*** f, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(kx+b))=0$.

Если только $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$, то прямая $y=kx+b$ называется соответственно *левосторонней* или *правосторонней наклонной асимптотой.*

Способы отыскания наклонных асимптот.

1) ***По определению***. $f(x)=(kx+b)+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to\infty$.

Если f – рациональная функция, т.е. $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, то можно разделить $P(x)$ на $Q(x)$ «уголком».

ЯГУБОВ.РФ

Примеры

8. $y=\dfrac{x^3+3x^2-5}{2x^2-x+1}$.

При делении уголком получим $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}+\dfrac{\frac{5}{4}x-\frac{27}{4}}{2x^2-x+1}$.

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$ – (двусторонняя) наклонная асимптота.

Замечание. Этот способ дает возможность по знаку остатка определить, проходит график функции выше или ниже асимптоты. Вообще, если $y=kx+b$ – наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$, то по знаку разности $f(x)-(kx+b)$ можно определить расположение графика относительно асимптоты на том или ином промежутке.

2) Выведем ***формулы для нахождения*** k и b в уравнении наклонной асимптоты.

$f(x)=(kx+b)+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to\infty$ (см. выше).

$\dfrac{f(x)}{x}=k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}$, здесь $\dfrac{b}{x}$ и $\dfrac{\alpha(x)}{x}$ – б.м. при $x\to\infty$;

$$k=\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{\alpha(x)}{x},\quad \text{т.е.}\quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\big(f(x)-kx\big)-\alpha(x)\qquad b=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big).$$

9. $y=f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-5}{2x^2-x+1}$.

□ $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2-5}{2x^3-x^2+x}=\dfrac{1}{2}$;

$$b=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2-5}{2x^2-x+1}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x^2-10-2x^3+x^2-x}{2\left(2x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-x-10}{4x^2-2x+2}=\frac{7}{4}.$$

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$ – (двусторонняя) наклонная асимптота.

✧ Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной (при $k=0$).

Примеры

Найти полный набор асимптот графика функций:

10. $f(x)=2x-3+\dfrac{x^{315}+x^{17}-\sqrt{2}}{x^{500}-1}$.

□ Конечно же, для нахождения асимптот здесь мы не будем использовать выведенные ранее формулы и, тем более, приводить к общему знаменателю.

По определению наклонной асимптоты $y=2x-3$ – (двусторонняя) наклонная асимптота (так как $\dfrac{x^{315}+x^{17}-\sqrt{2}}{x^{500}-1}$ – б.м. при $x\to\infty$);

$D_f: x\neq\pm1$; $\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)=\infty$. На D_f функция непрерывна как рациональная, так что $x=1$, $x=-1$ – все вертикальные асимптоты.

Ответ: $x=1$, $x=-1$ – вертикальные асимптоты; $y=2x-3$ – наклонная асимптота.

11. $h(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

□ $y=\operatorname{arctg}x$ – ограниченная функция, следовательно, искать вертикальные асимптоты бесполезно.

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{1-x^2}=\operatorname{arctg}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

$y=-\pi/4$ – (двусторонняя) горизонтальная асимптота.

Ответ: $y=-\dfrac{\pi}{4}$ – горизонтальная асимптота.

12. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$.

□ $D_g=(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup[1;\infty)$; $x=-2$ – (двусторонняя) вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-(1/x^2)}}{1+(2/x)}=1;$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-(1/x^2)}}{1+(2/x)}=-1.$$

$y=1$ – правосторонняя горизонтальная асимптота;

$y=-1$ – левосторонняя горизонтальная асимптота.

Ответ: $x=-2$ – (двусторонняя) вертикальная асимптота, $y=1$ – правосторонняя горизонтальная асимптота; $y=-1$ – левосторонняя горизонтальная асимптота.

ЯГУБОВ.РФ

13. $p(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-1}$.

□ $D_p=[0;1)\cup(1;\infty)$. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} p(x)=\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-1}=\mp\infty$;

$x=1$ – (двусторонняя) вертикальная асимптота.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}-x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(p(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-8-x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-8}{\sqrt{x}-1}=+\infty;$$

делаем вывод: наклонных асимптот нет.

Ответ: $x=1$ – вертикальная асимптота.

14.(*в*) $m(x)=xe^{-1/x}$.

□ $\lim\limits_{x\to 0-0} m(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} xe^{-1/x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{e^{-1/x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t=-\frac{1}{x}\to+\infty}\dfrac{e^t}{-t}=-\infty$.

$$\lim_{x\to 0+0} m(x)=\lim_{x\to 0+0} xe^{-1/x}=\lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0+0} e^{-1/x}=0\cdot 0=0.$$

$x=0$ – левосторонняя вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to\infty} m(x)=\lim_{x\to\infty} xe^{-1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-1/x}}{1/x}=\infty.$$

Горизонтальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{m(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} e^{-1/x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(m(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-1/x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\left(e^{-1/x}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{e^{-1/x}-1}{-1/x}\right)=\lim_{t=\frac{1}{x}\to 0}\left(-\frac{e^t-1}{t}\right)=-1.$$

$y=x-1$ – (двусторонняя) наклонная асимптота.

Приведем одно **неверное** рассуждение, подсказанное «здравым смыслом»: казалось бы, у графика m должна быть асимптота $y=x$, так как при $x\to\infty$ $e^{-1/x}\to 1$, т.е. m близко к x.

Ответ: $x=0$ – левосторонняя вертикальная асимптота; $y=x-1$ – (двусторонняя) наклонная асимптота.

15. ***Найти область определения, промежутки знакопостоянства и полный набор асимптот, построить эскиз графика функции:***

а) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$. б) $g(x)=\dfrac{x^4(x-3)}{(x+1)(x^4-16)}$. в) $l(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

г) (*в*) $z(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$. д) (*в*) $m(x)=xe^{-1/x}$. е) (*в*) $p(x)=2^{\frac{x-2}{x^2-3x}}$.

Оформим (возможный) порядок выполнения этого задания:

– находим область определения функции;

– расставляем знаки функции на числовой прямой;

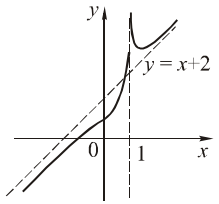
– находим асимптоты;

– отмечаем корни функции на координатной плоскости (или точки пересечения с осями);

– рисуем «хвостики» графика при подходе к вертикальным асимптотам. («Хвостик» вверху или внизу? Смотрим по картинке со знаками функции);

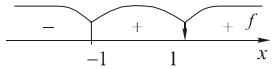
– учитывая все уже изображенное к этому моменту, заканчиваем чертеж.

Замечание. Конечно, проведенные исследования (без применения производной) дают возможность построить только очень приблизительный вариант эскиза графика!



□ а) $D_f=R\setminus\{1\}$; $x=1$ – вертикальная асимптота;

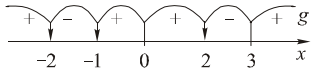
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$.



$$f(x)=\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=\frac{x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2+3x-1}{(x-1)^2}=x+2+\frac{3x-1}{(x-1)^2};$$

$y=x+2$ – наклонная асимптота.

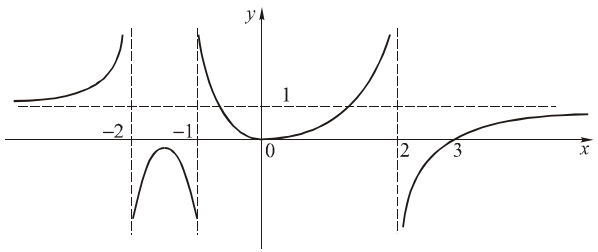
□ б) $D_g=R\setminus\{-1;-2;2\}$;



$\lim\limits_{x\to -1\pm 0} g(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to -2\pm 0} g(x)=\mp\infty$; $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} g(x)=\mp\infty$;

$x=-1$, $x=-2$, $x=2$ – вертикальные асимптоты.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$; $y=1$ – горизонтальная асимптота.

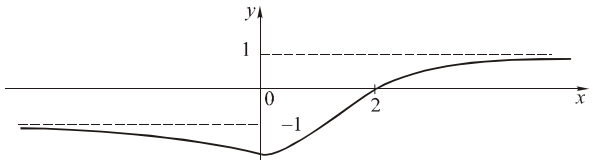


□ в) $D_l = R$;

$l(x) > 0$ при $x > 2$; $l(x) < 0$ при $x < 2$;

$$\lim_{x\to-\infty} l(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} l(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$



$y = -1$ – левосторонняя горизонтальная асимптота; $y = 1$ – правосторонняя горизонтальная асимптота.

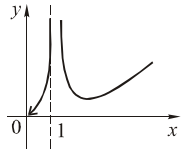
□ г) $D_z = (0;1) \cup (1;\infty)$; $\forall x \in D_z \;\; z(x) > 0$;

$\lim\limits_{x\to1} z(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{x}{\ln^2 x} = +\infty$; $x = 1$ – (двусторонняя) вертикальная асимптота;

$\lim\limits_{x\to+\infty} z(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln^2 x} = \lim\limits_{t=\ln x\to+\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$; горизонтальных асимптот нет.

$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{z(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} = 0$; наклонных асимптот нет ($k = 0$, наклонная асимптота «вырождается» в горизонтальную, а горизонтальных асимптот нет).

Для построения эскиза графика здесь необходимо знать поведение функции в окрестности 0 (тип точки разрыва):



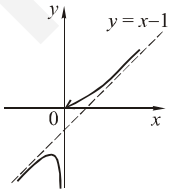
$$\lim_{x\to0+0} z(x) = \lim_{x\to0+0} \frac{x}{\ln^2 x} = \left\lfloor \lim_{t=\frac{1}{x}\to+\infty} \frac{(1/t)}{(-\ln t)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t} \right\rfloor = 0$$

(выделенная часть вычислений необязательна: и ранее видно, что предел имеет вид $\frac{0}{+\infty}$).

□ д) $D_m = R \setminus \{0\}$;

$m(x) > 0$ при $x > 0$; $m(x) < 0$ при $x < 0$.

См. выше: $\lim\limits_{x\to0-0} m(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to0+0} m(x) = 0$.



$x = 0$ – левосторонняя вертикальная асимптота;

$y = x - 1$ – (двусторонняя) наклонная асимптота.

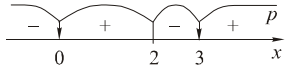
□ е) $D_p = (-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;\infty)$;

$p(x) > 0 \quad \forall x \in D_p$;

p непрерывна на D_p. Точки разрыва: $x = 0$, $x = 3$ (как это ни странно звучит, точки разрыва – точки, не входящие в область определения функции!)

Предварительно вычислим пределы показателя в точках разрыва и на бесконечности, а затем воспользуемся теоремой о пределе композиции функций.

Знаки показателя $y = \frac{x-2}{x(x-3)}$:



$$\lim_{x\to0-0} \frac{x-2}{x(x-3)} = -\infty \;;\; \lim_{x\to0+0} \frac{x-2}{x(x-3)} = +\infty \;;\; \lim_{x\to3-0} \frac{x-2}{x(x-3)} = -\infty \;;$$

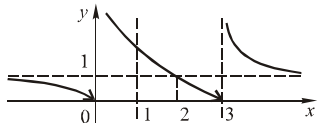
$$\lim_{x\to3+0} \frac{x-2}{x(x-3)} = +\infty \;;\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x(x-3)} = 0.$$

$$\lim_{x\to0-0} p(x) = \lim_{x\to0-0} 2^{\frac{x-2}{x^2-3x}} = 0 \;;\; \lim_{x\to0+0} p(x) = \lim_{x\to0+0} 2^{\frac{x-2}{x^2-3x}} = +\infty \;;$$

$$\lim_{x\to3-0} p(x) = \lim_{x\to3-0} 2^{\frac{x-2}{x^2-3x}} = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to3+0} p(x) = \lim_{x\to3+0} 2^{\frac{x-2}{x^2-3x}} = +\infty \;;\; \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{x-2}{x^2-3x}} = 2^0 = 1.$$

$x = 0$, $x = 3$ – правосторонние вертикальные асимптоты; $y = 1$ – (двусторонняя) горизонтальная асимптота.

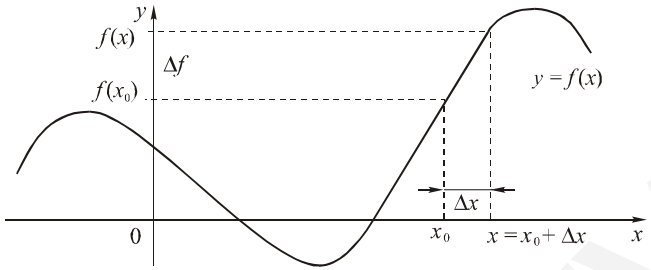


Глава 15. ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

К какому понятию мы обращаемся, когда, например, при прямолинейном движении нужно изучить изменение расстояния со временем? Конечно же, вспоминаем о средней скорости $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$. А еще точнее – вводим мгновенную скорость $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Таким же образом можно исследовать и поведение произвольной функции (не обязательно зависимость расстояния от времени).

Определение производной

Зафиксируем точку x_0 – «момент времени». Назовем расстояние от произвольной точки x до фиксированной точки x_0 (точнее, разность аргументов $x-x_0$, – ведь мы не знаем, что больше: x или x_0) *приращением аргумента*, обозначим Δx ($\Delta x=x-x_0$).



Изменение значения функции, т.е. величину $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ назовем *приращением функции* и обозначим $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

✧ Δf – разность значений в «новой» и в «старой» точках. Аналогом средней скорости будет отношение $\Delta f/\Delta x$, мгновенная же скорость изменения функции – величина $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, которую и называют производной функции f в точке x_0.

О п р е д е л е н и е. **Производной функции f в точке x_0** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0, если предел существует и конечен.

О б о з н а ч е н и е. $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}}$

Поставив в соответствие каждому значению x (если это возможно) число $f'(x)$, получим функциональную зависимость, т.е. функцию f', называемую производной функции f.

П р и м е р ы

Используя определение производной, найти производную функций:

1. $f(x)\equiv c\quad (c\in R)$.

□ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$. $(c)'=0$.

(Заметим, что здесь не получилось неопределенности типа $0/0$, так как числитель **равен** 0, а знаменатель – бесконечно малая, но не 0, знаменатель только стремится к 0, а во всех точках $\Delta x\neq 0$ дробь $\Delta f/\Delta x=0$, а значит, и предел в точке x_0 нулевой.)

2. $f(x)=kx+b\quad (k,\ b\in R)$.

□ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k(x_0+\Delta x)+b-(kx_0+b)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$. $(kx+b)'=k$, $x\in R$.

3. $f(x)=x^2$.

□ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^{\,2}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2x_0$. $(x^2)'=2x, x\in R$.

4. $f(x)=\sqrt{x}$.

□ Рассмотрим $x_0>0$.

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}=$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0.$$

Заметим, что при $x_0 = 0$ предел (односторонний) бесконечен, т.е. конечной производной функция f в 0 не имеет.

5. $f(x) = \sin x$.

□ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0 .$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x,\quad x\in R}$$

Техника дифференцирования

Теорема. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $f+g$ также дифференцируема в точке x_0, причем* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

✧ Часто эту теорему формулируют так: «**производная суммы равна сумме производных**».

Теорема. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция fg также дифференцируема в точке x_0, причем* $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$.

✧ Часто эту теорему формулируют так: «**производная произведения есть производная первого множителя, умноженная на второй, плюс производная второго множителя, умноженная на первый**».

Заметьте: формула для производной произведения сложнее, чем формула для предела произведения!

Следствие. $(cf)'(x) = cf'(x),\ c\in R$ (константу можно выносить за знак производной!)

Доказательство следствия предоставляем читателю.

Теорема. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0, $g(x_0)\neq 0$. Тогда функция f/g также дифференцируема в точке x_0, причем* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}}$$ (частный случай)

Утверждение. $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

В качестве упражнения на повторение предлагаем читателю доказать по методу математической индукции приведенное утверждение для натуральных значений n, а затем проверить для $n=0$ и перейти к целым отрицательным n, используя лемму о производной функции $1/g$. Заметим (без доказательства), что формула верна для **любых действительных** значений n.

Примеры

Продифференцировать функции:

6. $y = x^5-6x^3+x^2+\dfrac{1}{x^2}-\cos 12$.

□ $x\neq 0;\ (x^5-6x^3+x^2+\dfrac{1}{x^2}-\cos 12)' = 5x^4-18x^2+2x-\dfrac{2}{x^3}$.

Замечание. Наибольшее количество ошибок в подобных примерах бывает при дифференцировании слагаемых типа $1/x^n$, в данном случае, $1/x^2$. ($-2-1=-3$, а не -1). Кроме того, мы надеемся, что все читатели заметили: $-\cos 12$ – константа!

7. $y = \sqrt[3]{x}$.

□ $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{1/3}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x>0$;

если продифференцировать по определению $\sqrt[3]{x}$ при $x<0$, то можно убедиться, что формула будет такой же. Однако если мы формально и можем дифференцировать корень как степень, то результат необходимо записать в исходном виде – с корнями, так как функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{2n+1}}$ имеют различные области определения.

8. $y=\dfrac{x^4+\sqrt{x}-2+\dfrac{1}{x}}{x}$.

□ $\left(\dfrac{x^4+\sqrt{x}-2+(1/x)}{x}\right)'=\left(x^3+x^{-1/2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)'=$

$=3x^2-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}=3x^2-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$.

9. $y=\left(x^3-2\right)\cdot\left(2\sqrt[5]{x^2}\right)$.

□ $\left(\left(x^3-2\right)\left(2\sqrt[5]{x^2}\right)\right)'=3x^2\cdot 2\sqrt[5]{x^2}+\left(x^3-2\right)\cdot 2\cdot\dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=$

$=6x^2\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^3}}\left(x^3-2\right)$.

10. $y=\dfrac{x^2-3x}{1+2x}$.

□ $\left(\dfrac{x^2-3x}{1+2x}\right)'=\dfrac{(2x-3)(1+2x)-2\left(x^2-3x\right)}{(1+2x)^2}=\dfrac{2x^2+2x-3}{(1+2x)^2}$.

11. $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

□ $\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{\cos x\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x}{x}=\dfrac{2x\cos x-\sin x}{2x\sqrt{x}}$.

Теорема. **Производная сложной функции**.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, функция g дифференцируема в точке $f(x_0)$. Тогда функция $g\circ f$ ($g\circ f(x)=g(f(x))$) также дифференцируема в точке x_0, причем $\boxed{\left(g(f)\right)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)}$

✧ **Замечание**. Использовать эту теорему можно и для функций, образованных многократным вложением. При этом каждый раз нужно искать самую внешнюю функцию и начинать дифференцирование с нее, затем «снимать оболочку», как лист с капусты, и продолжать дифференцирование того, что осталось.

Теорема. **Производная обратной функции**.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет обратную функцию, $f'(x_0)\neq 0$. Тогда функция f^{-1} также дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$, причем

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\left(f'(x_0)\right)^{-1}}$$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}}$$

П р и м е р ы

Вывести производную функций:

12. $y=\cos x$.

□ 1-й с п о с о б.

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=-\sin x.$$

2-й с п о с о б.

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)=-\sin x.$$

$(\cos x)'=-\sin x$

13. $y=\arcsin x$.

□ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)}=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\underline{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

На всякий случай докажем, что $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Пусть $\arcsin x=\alpha$; тогда $\sin\alpha=x$, $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$$

14. (*в*) $y = e^x$.

□ $\left(e^x\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$.

$$(e^x)' = e^x$$

15. (*в*) $y = a^x$.

□ $\left(a^x\right)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\left(x\ln a\right)' = a^x\ln a$.

$$(a^x)' = a^x\ln a$$

16. (*в*) $y = \ln x$.

□ $\left(\ln x\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$.

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Замечание. $\left(\ln\left(-x\right)\right)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. Часто пишут так: $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$.

17. (*в*) $y = \log_a x$.

□ $\left(\log_a x\right)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$$

Продифференцировать функции:

18. $y = \left(7x^3 - x + 9\right)^{100}$.

□ $\left(\left(7x^3-x+9\right)^{100}\right)' = 100\left(7x^3-x+9\right)^{99}\left(7x^3-x+9\right)' =$

$= 100\left(7x^3-x+9\right)^{99}\left(21x^2-1\right)$.

19. $y = \cos^5\left(4-x\right)$.

□ $\left(\cos^5\left(4-x\right)\right)' = 5\cos^4\left(4-x\right)\left(\cos\left(4-x\right)\right)' = 5\cos^4\left(4-x\right)\left(-\sin\left(4-x\right)\right)\left(4-x\right)' =$

$= 5\cos^4\left(4-x\right)\left(-\sin\left(4-x\right)\right)\left(-1\right) = 5\cos^4\left(4-x\right)\sin\left(4-x\right)$.

20. $y = \sin\left(\cos\left(\mathrm{tg}\left(\mathrm{ctg}x^2\right)\right)\right)$.

□ $\left(\sin\left(\cos\left(\mathrm{tg}\left(\mathrm{ctg}x^2\right)\right)\right)\right)' = \cos\left(\cos\left(\mathrm{tg}\left(\mathrm{ctg}x^2\right)\right)\right)\times$

$\times\left(-\sin\left(\mathrm{tg}\left(\mathrm{ctg}x^2\right)\right)\right)\dfrac{1}{\cos^2\left(\mathrm{ctg}x^2\right)}\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x^2}\right)2x$.

21. $y = \left(\left(\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^3+1\right)^4+1\right)^5$.

□ $\left(\left(\left(\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^3+1\right)^4+1\right)^5\right)' =$

$= 5\left(\left(\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^3+1\right)^4+1\right)^4 4\left(\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^3+1\right)^3 3\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^2 2\left(x+1\right)$.

22. $y = \dfrac{5-x^4}{\sqrt[3]{x^2-2}}$.

□ $\left(\dfrac{5-x^4}{\sqrt[3]{x^2-2}}\right)' = \dfrac{-4x^3\cdot\sqrt[3]{x^2-2}-\left(5-x^4\right)\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-2\right)^2}}2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-2\right)^2}} =$

$= \dfrac{-2x\left(6x^2\left(x^2-2\right)+\left(5-x^4\right)\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-2\right)^4}} = \dfrac{-2x\left(5x^4-12x^2+5\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-2\right)^4}}$.

23. $y = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

□ $\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2}\cdot\dfrac{1\left(x-1\right)-1\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)^2} =$

$= \dfrac{-3}{\left(x-1\right)^2+\left(x+2\right)^2} = -\dfrac{3}{2x^2+2x+5}$.

ЯГУБОВ.РФ

24. $y=\sin\left(2\operatorname{arctg}x\right)$.

□ $(\sin\left(2\operatorname{arctg}x\right))'=\cos\left(2\operatorname{arctg}x\right)\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{2}{1+x^2}$.

Если же сначала преобразовать выражение, то задание выглядит так:

$$y=\sin\left(2\operatorname{arctg}x\right)=\frac{2x}{1+x^2};\quad y'=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

25. $y=\left(\arcsin\left(x^2+1\right)+1\right)^7$.

□ Прежде чем начинать дифференцировать, проанализируем задачу. Область допустимых значений: $-1\le x^2+1\le 1$. Очевидно, что второе неравенство выполняется только при $x=0$, т.е. функция определена только в одной точке, и, следовательно, не может быть дифференцируемой!

26. (*в*) $y=\ln\ln\ln x$.

□ $(\ln\ln\ln x)'=\dfrac{1}{\ln\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$.

27. (*в*) $y=x^x$.

□ $(x^x)'=\left(e^{\ln x^x}\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)'=x^x\left(1\cdot\ln x+x\left(1/x\right)\right)=x^x\left(\ln x+1\right)$.

28. (*в*) $y=\log_{3x^5-2x}\left(\sin(10x)\right)$.

□ $(\log_{3x^5-2x}\left(\sin(10x)\right))'=\left(\dfrac{\ln\sin\left(10x\right)}{\ln\left(3x^5-2x\right)}\right)'=$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sin 10x}\cos 10x\cdot 10\cdot\ln\left(3x^5-2x\right)-\ln\sin 10x\cdot\dfrac{1}{3x^5-2x}\left(15x^4-2\right)}{\ln^2\left(3x^5-2x\right)}.$$

29. (*в*) $y=\left(2\sqrt{3x-1}+5\right)^{1-\sqrt{3x-1}}$.

□ Заметим, что дана сложная функция: $y=f\left(g\left(x\right)\right)$, где

$g\left(x\right)=\sqrt{3x-1},\ f\left(x\right)=\left(2x+5\right)^{1-x}$. $g'\left(x\right)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$;

$$f'\left(x\right)=\left(e^{(1-x)\cdot\ln(2x+5)}\right)'=e^{(1-x)\cdot\ln(2x+5)}\left((1-x)\cdot\ln\left(2x+5\right)\right)'=$$

$$=\left(2x+5\right)^{1-x}\left(-\ln\left(2x+5\right)+\left(1-x\right)\cdot\frac{1}{2x+5}\cdot 2\right)=\left(2x+5\right)^{1-x}\left(\frac{2\left(1-x\right)}{2x+5}-\ln\left(2x+5\right)\right).$$

$$y'=\left(\left(2\sqrt{3x-1}+5\right)^{1-\sqrt{3x-1}}\right)'=$$

$$=\left(2\sqrt{3x-1}+5\right)^{1-\sqrt{3x-1}}\left(\frac{2\left(1-\sqrt{3x-1}\right)}{2\sqrt{3x-1}+5}-\ln\left(2\sqrt{3x-1}+5\right)\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}.$$

30. (*в*) $y=\dfrac{e^{x^2}+xe^{-x^2+x}}{e^{x^2}}$.

□ $\left(\dfrac{e^{x^2}+xe^{-x^2+x}}{e^{x^2}}\right)'=\left(1+xe^{-x^2+x-x^2}\right)'=\left(1+xe^{-2x^2+x}\right)'=$

$$=e^{-2x^2+x}+xe^{-2x^2+x}\cdot\left(-4x+1\right)=e^{-2x^2+x}\left(-4x^2+x+1\right).$$

31. (*в*) $y=\log_5\left(\sqrt{x}+2\right)\cdot\dfrac{1}{x}$.

□ $\left(\log_5\left(\sqrt{x}+2\right)\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\ln 5}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\cdot\log_5\left(\sqrt{x}+2\right)=$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{\log_5\left(\sqrt{x}+2\right)}{x^2}.$$

32. (*в*) $y=2^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

□ $\left(2^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)'=2^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\ln 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{-1\cdot\left(1+x\right)-1\cdot\left(1-x\right)}{\left(1+x\right)^2}=-2^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\ln 2\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{\left(1+x\right)^2}$.

33. (*в*) $y=(\cos x)^{\arccos x}$.

□ $((\cos x)^{\arccos x})'=\left(e^{\arccos x\cdot\ln\cos x}\right)'=$

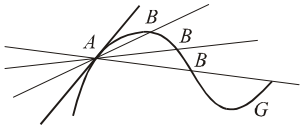
$$=e^{\arccos x\ln\cos x}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\cos x+\arccos x\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=-\cos x^{\arccos x}\left(\frac{\ln\cos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arccos x\cdot\sin x}{\cos x}\right).$$

ЯГУбов.рф

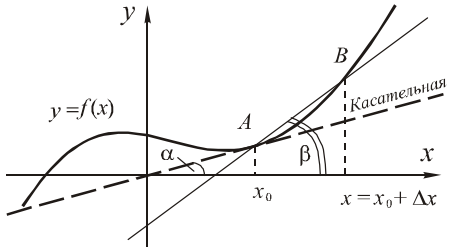
Глава 16. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. КАСАТЕЛЬНАЯ. НОРМАЛЬ

Рассмотрим произвольную гладкую кривую G и фиксированную точку кривой A. Проведем секущую AB.



О п р е д е л е н и е.

Касательной к кривой G**,** ***проведенной в точке*** A, называется предельное положение секущей AB, когда B стремится к A, оставаясь при этом точкой кривой.



Уравнение секущей AB: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=k;\quad \dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}=k=\operatorname{tg}\beta$.

Для точки B: $y=f(x)$, т.е. $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k=\operatorname{tg}\beta$. Касательная – предельное положение секущей, тогда

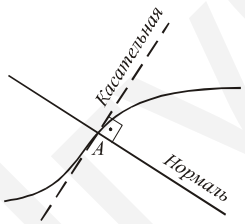
$$k_{\text{кас}}=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\lim_{\Delta x\to 0}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

В ы в о д: угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной функции в точке касания.

Запишем уравнение касательной к графику функции f, проведенной в точке с абсциссой x_0: $\Delta y/\Delta x=k_{\text{кас}}$;

$$\boxed{\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$$

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$



О п р е д е л е н и е. ***Нормалью к кривой в точке*** A называется прямая, проходящая через точку A, перпендикулярная касательной к кривой в этой точке.

Замечание. Надеемся, что читатель помнит, как связаны угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых. Все же напомним: $k_1k_2=-1$.

$$\left(k_2=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}=-\frac{1}{k_1}\right).$$

Запишем уравнение нормали к графику функции f, проведенной в точке с абсциссой x_0: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-1}{k_{\text{кас}}}$; $\boxed{\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{-1}{f'(x_0)}}$

$$\boxed{y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)}$$

П р и м е р ы

1. ***Написать уравнения касательной и нормали, проведенных в точке с абсциссой*** x_0 ***к графику функции*** $f(x)=x^2+3x-10,\ x_0=2$.

□ Найдем производную функции f: $f'(x)=2x+3$.

$f(2)=4+6-10=0;\quad f'(2)=7$.

Касательная: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. В данном случае $y=0+7(x-2)$.

Нормаль: $y=f(x_0)-(1/f'(x_0))(x-x_0)$. В данном случае $y=0-(1/7)(x-2)$.

Ответ: $y=7x-14$; $y=-\dfrac{x}{7}+\dfrac{2}{7}$.

2. ***Написать уравнения касательной и нормали, проведенных в точке с абсциссой*** x_0 ***к графику функции*** $f(x)=\cos 2x,\ x_0=\pi/12$.

□ $f'(x)=-\sin 2x\cdot 2;\ f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{6}=-1$.

Касательная: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$. Нормаль: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{1}\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Ответ: $y=-x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{12}$; $y=x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}$.

3. (*в*) ***Написать уравнения касательной и нормали, проведенных в точке с абсциссой*** x_0 ***к графику функции*** $f(x)=\ln^2 x,\ x_0=e$.

□ $f'(x)=2\ln x(\ln x)'=2\ln x\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x};\ f(e)=1;\ f'(e)=\dfrac{2}{e}$.

Касательная: $y=1+\dfrac{2}{e}(x-e)$. Нормаль: $y=1-\dfrac{e}{2}(x-e)$.

Ответ: $y=\dfrac{2x}{e}-1$; $y=-\dfrac{ex}{2}+1+\dfrac{e^2}{2}$.

4. ***Написать уравнение всех касательных к графику функции*** $f(x)=2x^4+5x-1$ ***, проходящих через точку*** $A(0;-7)$.

☐ Задание отличается от предыдущего тем, что данная точка не является точкой касания, необходимой для записи уравнения. Поэтому абсциссу точки касания мы обозначим какой-либо буквой, например, a. Запишем уравнение касательной к графику данной функции в общем виде (с неизвестной абсциссой точки касания a):

$$f'(x)=8x^3+5;\quad f(a)=2a^4+5a-1;\quad f'(a)=8a^3+5.$$

Уравнение касательной: $y=2a^4+5a-1+(8a^3+5)(x-a)$;

$y=-6a^4+8xa^3+5x-1$ (называют уравнением семейства касательных к $f(x)$).

Если точка A принадлежит касательной, то ее координаты $(x=0;y=-7)$ удовлетворяют записанному уравнению: $-7=-6a^4-1$; $6a^4=6$; $a=\pm1$.

Осталось для каждого из найденных значений a найти уравнение (подставив a в приведенное выше уравнение $y=x(8a^3+5)-6a^4-1$).

Ответ: $y=13x-7;\quad y=-3x-7.$

5. ***При каких значениях параметра*** p ***прямая*** $x-y=1$ ***является касательной к графику*** $y=x^2+p(x-1)$ ***?***

☐ Задание можно выполнить как методами 9-го класса, так и с применением производной.

1-й способ.

Напишем уравнение касательной к данной квадратичной функции в общем виде, т.е. с неизвестной абсциссой точки касания a: $y=x^2+p(x-1)$; $y'=2x+p$.

$$y_{\text{кас}}=a^2+p(a-1)+(2a+p)(x-a),\quad y_{\text{кас}}=x(2a+p)+(-a^2-p).$$

Тогда по условию задачи $x-y=1$, т.е. $y=x-1$, и $y=(2a+p)x+(-a^2-p)$ – одна и та же прямая, т.е. коэффициенты при x и свободные члены в данных уравнениях должны совпадать. Получаем систему уравнений с двумя неизвестными a и p: $\begin{cases}2a+p=1\\-a^2-p=-1\end{cases}$.

Решая систему, получаем искомые значения p.

$$\begin{cases}2a+p=1\\-a^2-p=-1\end{cases};\ \begin{cases}p=1-2a\\a^2-2a=0\end{cases};\ \begin{cases}p=1-2a\\a\in\{0;2\}\end{cases};\ p\in\{1;-3\}.$$

Ответ: $1;-3$.

2-й способ.

Воспользуемся другим определением касательной к параболе (подобное определение можно дать касательной к графику любой гладкой функции, обладающей выпуклостью только одного типа):

Прямая, не параллельная оси параболы, называется касательной, если она имеет с параболой единственную общую точку.

Задача свелась к вопросу: «При каких значениях параметра p уравнение $x^2+p(x-1)=x-1$ имеет единственное решение?». Приравняем дискриминант к нулю: $x^2+x(p-1)+(1-p)=0$;

$$D=(p-1)^2-4(1-p)=(p-1)(p-1+4)=(p-1)(p+3)=0;\ p\in\{1;-3\}.$$

Ответ: $1;-3$.

6. ***Под каким углом синусоида*** $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ ***пересекает ось*** Ox ***в начале координат?***

☐ Угол между кривыми в точке их пересечения – это угол между касательными, проведенными к кривым в их общей точке.

Найдем угол наклона касательной к синусоиде $y=(1/\sqrt{3})\sin 3x$ в начале координат. Тангенс угла – это значение производной функции $y=(1/\sqrt{3})\sin 3x$ в точке $x=0$.

$$y'=(1/\sqrt{3})3\cos 3x=\sqrt{3}\cos 3x;\quad y'(0)=\sqrt{3};\quad \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3};\quad \alpha=\pi/3.$$

Ответ: $\pi/3$.

7. ***Найти длину отрезка касательной к кривой*** $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ ***, проведенной через точку*** $M(1;8)$ ***, заключенного между осями координат.***

☐ Напишем уравнение касательной к данному графику в общем виде с неизвестной абсциссой точки касания a:

$$y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3};\ y'=\frac{3}{2}\sqrt{5-x^{2/3}}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=-x^{-1/3}\sqrt{5-x^{2/3}};$$

$$y_{\text{кас}}=\sqrt{(5-a^{2/3})^3}-a^{-1/3}\sqrt{5-a^{2/3}}(x-a);$$

$$y_{\text{кас}}=-xa^{-1/3}\sqrt{5-a^{2/3}}+\sqrt{5-a^{2/3}}\left(5-a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right);$$

$$y_{\text{кас}}=\sqrt{5-a^{2/3}}\left(-xa^{-1/3}+5\right).$$

Запишем условие принадлежности касательной точки $M(1;8)$: $8=\sqrt{5-a^{2/3}}\left(5-a^{-1/3}\right)$. $8=\sqrt{5-a^{2/3}}\left(5-a^{-1/3}\right)$; $8a^{1/3}=\sqrt{5-a^{2/3}}\left(5a^{1/3}-1\right)$.

Положим $t = a^{1/3} > 0$.

$8t = \sqrt{5-t^2}\,(5t-1)$; $64t^2 = \left(5-t^2\right)(5t-1)^2$; $5t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 10t - 1 = 0$.

Проверкой убеждаемся, что $t = 1$ – корень уравнения 2-й кратности. $(t-1)^2\left(5t^2+8t-1\right) = 0$.

Уравнение $5t^2 + 8t - 1 = 0$ положительных корней не имеет. Таким образом, абсцисса точки касания найдена: $a = 1$. Уравнение искомой касательной принимает вид $y = -2x + 10$.

Точки пересечения касательной с осями координат: $(5;0)$ и $(0;10)$, а длина отрезка касательной, заключенного между осями координат равна $\sqrt{5^2+10^2} = 5\sqrt{1+4} = 5\sqrt{5}$.

Ответ: $5\sqrt{5}$.

8. ***При каком значении*** k ***касательная к графику*** $y = kx^2$ ***образует с осью абсцисс угол, равный*** $\frac{\pi}{3}$***, и отсекает от*** 4***-й четверти треугольник площадью*** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ***?***

□ Приведем два способа решения задачи.

1-й с п о с о б.

Пусть абсцисса точки касания $x = a$. Общий вид уравнения касательной

$$y = ka^2 + 2ka(x-a); \quad y = 2kax - ka^2.$$

Первое условие – угол наклона $\pi/3$, т.е. угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Получаем уравнение $2ka = \sqrt{3}$.

Точки пересечения касательной с осями координат: $(a/2;0)$ и $\left(0;-ka^2\right)$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}\left|ka^2\,\frac{a}{2}\right| = \left|\frac{ka^3}{4}\right|$ (полупроизведение катетов).

Заметим, что по условию касательная должна отсекать треугольник от 4-й четверти, т.е. $a/2 > 0$, $-ka^2 < 0$.

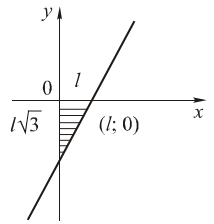
Запишем и решим относительно k систему, полученную из условия задачи:

$$\begin{cases} 2ka = \sqrt{3} \\ \dfrac{ka^3}{4} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} ka = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}; \\ a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \\ k = \dfrac{\sqrt{3}}{2a}; \end{cases} \quad k = \frac{3}{16}.$$

Ответ: $3/16$.

2-й с п о с о б.

Начнем с уравнения прямой, угол наклона которой к оси Ox равен $\frac{\pi}{3}$, а площадь треугольника, отсекаемого прямой от 4-й четверти, равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



$$S = \frac{1}{2}l \cdot l\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}; \quad l^2 = \frac{16}{3}; \quad l = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Уравнение прямой: $y = (x-l)\sqrt{3}$; при $l = \frac{4}{\sqrt{3}}$ уравнение принимает вид: $y = \left(x - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}$; $y = x\sqrt{3} - 4$.

Поставим условие касания, т.е. единственности общей точки прямой и параболы.

$$kx^2 = x\sqrt{3} - 4; \quad kx^2 - x\sqrt{3} + 4 = 0; \quad D = 3 - 16k = 0; \quad k = 3/16.$$

Ответ: $3/16$.

9. ***Найти уравнения общих касательных к графикам*** $y = x^2 + x + 1$ ***и*** $y = \frac{1}{2}\left(x^2+3\right)$.

□ Приведем самый обычный и АБСОЛЮТНО НЕВЕРНЫЙ способ решения этой задачи, после применения которого обычно следуют жалобы на некорректное условие и отсутствие ответа (мы не хотим сказать, что все наши читатели обязательно стали бы делать так же):

Запишем для каждой функции уравнение касательной в общем виде:

$$y = x^2 + x + 1$$
$$y' = 2x + 1$$
$$y_{\text{кас}} = x_0{}^2 + x_0 + 1 + (2x_0+1)(x - x_0)$$
$$y_{\text{кас}} = (2x_0+1)x + \left(-x_0{}^2 + 1\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2+3\right)$$
$$y' = x$$
$$y_{\text{кас}} = \frac{1}{2}\left(x_0{}^2+3\right) + x_0(x - x_0)$$
$$y_{\text{кас}} = x_0 x + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_0{}^2\right)$$

после чего приравняем в правых частях соответствующие коэффициенты и найдем x_0:

$$\begin{cases} 2x_0 + 1 = x_0 \\ 1 - x_0{}^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_0{}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0{}^2 = -1 \end{cases}$$

Решений нет!

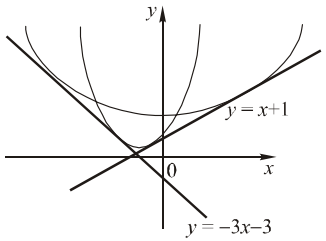
Почему же этот способ неверный? Ведь кажется, что все использованные ранее приемы проведены правильно!

Дело в том, что общая касательная – это прямая, которая касается и того, и другого графика, но **не обязательно в одной точке**. (Для сравнения зададим другой вопрос: «Когда две параболы имеют единственную общую точку?». Правда, на этот вопрос легче отвечать без применения производной.)

Сравните два случая.

1-й с п о с о б.

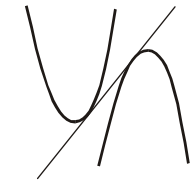
Теперь понятно, как исправить предыдущий способ решения. Пусть абсциссы касания искомой общей касательной с первым графиком – a, со вторым – b. Записываем дважды уравнение общей касательной:



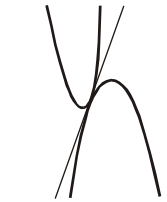
$$\begin{cases} y = x(2a+1) + (1-a^2), \\ y = xb + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}b^2\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+1 = b, \\ 1-a^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}b^2. \end{cases}$$

Заметим, что для написания уравнения общей касательной достаточно найти из системы только a или только b. Но находите и a, и b. Это поможет вам избежать арифметической ошибки.



Общая касательная, различные точки касания



Общая касательная, одна точка касания

$$1-a^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2a+1)^2;$$

$$2-2a^2 = 3-4a^2-1-4a;$$

$$2a^2+4a=0; \quad \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

Получаем две общие касательные: $y = x+1$ и $y = -3x-3$.

Ответ: $y = x+1$; $y = -3x-3$.

2-й с п о с о б.

Пусть уравнение искомой общей касательной $y = kx+b$ (с неопределенными коэффициентами). Запишем условие единственности общей точки с прямой для каждой параболы:

$$x^2+x+1 = kx+b, \qquad \frac{1}{2}(x^2+3) = kx+b;$$

$$x^2+x(1-k)+(1-b)=0, \qquad x^2-2kx+(3-2b)=0;$$

$$D_1 = (1-k)^2-4(1-b) = k^2-2k+4b-3=0, \qquad \frac{D_2}{4} = k^2+2b-3=0;$$

$$\begin{cases} k^2-2k+4b-3=0, \\ k^2+2b-3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2k+2b=0, \\ k^2+2k-3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} k=b, \\ \left[\begin{array}{l} k=1, \\ k=-3. \end{array}\right. \end{cases}$$

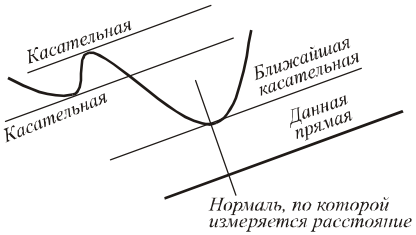
Ответ: $y = x+1$; $y = -3x-3$.

10. ***Найти наименьшее расстояние между графиками*** $y = x^4+3x^2+2x$ ***и*** $y = 2x-4$.

□ Первое, что необходимо сделать при решении данной задачи, – проверить, нет ли у графиков общих точек. Если есть, то ответом будет 0.

Решаем уравнение $x^4+3x^2+2x = 2x-4$. $x^4+3x^2+4=0$; $\varnothing$.

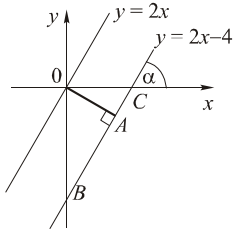
Если бы одна из предложенных кривых не являлась прямой, то нам пришлось бы искать общую нормаль. Но здесь достаточно найти все касательные к первому графику, параллельные данной прямой, выбрать из них ближайшую к прямой и найти расстояние между касательной и данной прямой. На чертеже изобразим решение того же задания для **каких-либо** кривой и прямой:



Итак, найдем, в каких точках касательная к кривой $y = x^4+3x^2+2x$ параллельна прямой $y = 2x-4$, т.е. имеет угловой коэффициент 2.

$$y = x^4+3x^2+2x; \quad y' = 4x^3+6x+2 = 2; \quad 2x^3+3x=0; \quad x=0.$$

В данном случае нам повезло – такая точка оказалась единственной (соответствующее уравнение касательной $y = 0+2(x-0)$, т.е. $y = 2x$). Все же выясним, как выбрать из нескольких прямых, параллельных прямой $y = 2x-4$, ближайшую к ней. Дело в том, что эти прямые отличаются только свободным членом. Нужно было бы выбрать свободный член, наиболее близкий к числу -4.



А теперь – осторожно! Нужно найти расстояние между прямыми $y = 2x-4$ и $y = 2x$. Ни в коем случае не пишем автоматически в ответ разность свободных членов, т.е. 4. 4 – это расстояние на оси ординат между точками пересечения с ней данных прямых, а вовсе **не расстояние между прямыми**!

Предложим несколько способов решения этой задачи.

1-й с п о с о б (аналитический).

Написать уравнение любой прямой, перпендикулярной данным, найти точки пересечения ее с данными прямыми, найти расстояние между этими точками.

2-й с п о с о б (упрощение предыдущего).

Написать уравнение нормали, проведенной к данной кривой в найденной точке касания O (в данном случае, в начале координат), найти точку A ее пересечения с данной в условии задачи прямой, вычислить расстояние OA между этой точкой и точкой касания.

В данном случае: нормаль $y=-\frac{1}{2}x$; A: $-\frac{1}{2}x=2x-4$; $\frac{5x}{2}=4$; $x=\frac{8}{5}$; $y=-\frac{4}{5}$. $A\left(\frac{8}{5};-\frac{4}{5}\right)$. $OA=\frac{4}{5}\sqrt{2^2+(-1)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $4/\sqrt{5}$.

3-й с п о с о б (геометрический).

Из найденного ранее в прямоугольном треугольнике OAB известен катет $OB=4$ и острый угол AOB (он равен углу наклона α заданной прямой к оси абсцисс), тангенс которого равен 2. Тогда

$$OA=OB\cos\alpha=OB\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=4\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $4/\sqrt{5}$.

4-й с п о с о б (модификация предыдущего).

$OB=4$, $\operatorname{tg}\alpha=2$. Тогда второй катет треугольника OBC $OC=2$; высоту OA указанного прямоугольного треугольника получаем делением произведения катетов на гипотенузу:

$$OA=\frac{2\cdot 4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+4}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $4/\sqrt{5}$.

Заметим, что способ с нормалью удобен в том случае, когда нужно найти ближайшие точки кривой и прямой, или же когда не хочется делать чертеж.

Замечание. После вычисления точки касания задача сводится к вычислению расстояния от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ по формуле $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и это самый простой способ.

11. ***В произвольной точке графика функции $y=\sqrt{2x-x^2}$ проведена касательная. Доказать, что длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью Oy равна ординате точки пересечения.***

□ Приведем два способа решения этой задачи: «честный», т.е. для трудолюбивых, и «быстрый» – для внимательных.

1-й с п о с о б (аналитический).

$y=f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; $D_f=[0;2]$. $D_{f'}=(0;2)$.

Пусть $x=a$ – абсцисса точки касания.

$$y=f(x)=\sqrt{2x-x^2};\quad f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}};$$

$$y_{\text{кас}}=\sqrt{2a-a^2}+\frac{1-a}{\sqrt{2a-a^2}}(x-a);$$

$$y_{\text{кас}}=x\frac{1-a}{\sqrt{2a-a^2}}+\left(\sqrt{2a-a^2}-\frac{(1-a)a}{\sqrt{2a-a^2}}\right);$$

$$y_{\text{кас}}=x\frac{1-a}{\sqrt{2a-a^2}}+\frac{2a-a^2-a+a^2}{\sqrt{2a-a^2}}=x\frac{1-a}{\sqrt{2a-a^2}}+\frac{a}{\sqrt{2a-a^2}}.$$

Точка касания: $K\left(a;\sqrt{2a-a^2}\right)$. Точка пересечения касательной с осью ординат: $U\left(0;\,a/\sqrt{2a-a^2}\right)$.

$$UK=\sqrt{(a-0)^2+\left(\sqrt{2a-a^2}-\frac{a}{\sqrt{2a-a^2}}\right)^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{2a-a^2-a}{\sqrt{2a-a^2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{a^4+a^2-2a^3}{2a-a^2}}=\sqrt{\frac{2a^3-a^4+a^4+a^2-2a^3}{2a-a^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{2a-a^2}}=\frac{a}{\sqrt{2a-a^2}}.$$

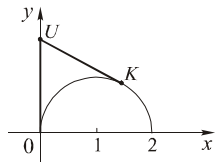
что и требовалось доказать.

2-й с п о с о б (графический).

Не начиная громоздких преобразований, построим график заданной функции.

$$y=\sqrt{2x-x^2};\qquad \begin{cases}y^2=2x-x^2\\ y\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Получили верхнюю полуокружность с центром в точке $(1;0)$ радиуса 1.



Тогда получается, что в задаче просили просто доказать свойство равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к одной и той же окружности! Задача решена.

12. ***Найти расстояние от точки $A(5;-1)$ до параболы $y=x^2$ (наименьшее расстояние между точкой A и точкой параболы).***

□ Во-первых, задачу можно решать как задачу на наименьшее значение. Но сейчас у нас речь идет о касательных и нормалях, поэтому переформулируем задание: «Найти длину отрезка нормали к параболе $y=x^2$, проходящей через точку $A(5;-1)$, от точки A до точки параболы».

Пишем уравнение нормали в общем виде (абсцисса точки параболы, в которой проведена нормаль, $x=a$).

$$y=x^2;\ y'=2x;\quad \frac{y_{н.}-y(a)}{x-a}=-\frac{1}{y'(a)};\quad \frac{y-a^2}{x-a}=-\frac{1}{2a}.$$

Условие принадлежности точки A искомой нормали:

$$\frac{-1-a^2}{5-a}=-\frac{1}{2a};\quad \left(1+a^2\right)2a=5-a;\quad 2a^3+3a-5=0.$$

Один из корней полученного кубического уравнения легко угадывается: это $a=1$. Разделив многочлен $2a^3+3a-5$ на $a-1$ например, по схеме Горнера, для остальных корней получаем уравнение $2a^2+2a+5=0$, не имеющее действительных корней.

	2	0	3	–5
1	2	2	5	0

Точка, в которой проведена нормаль, имеет координаты $(1;1)$. Искомое расстояние – это расстояние между точками $(5;-1)$ и $(1;1)$, т.е. $\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

13. ***Найти уравнение прямой, касающейся графика функции*** $y=x^4-2x^3+x^2+x-2$ ***в двух точках.***

□ Представьте себе, что мы для решения задачи напишем два (!) уравнения касательной с различными абсциссами точек касания a и b (!) к функции, заданной уравнением 4-й степени (!), а затем будем приравнивать коэффициенты при переменной и свободные члены (!). Представили? А теперь попробуем найти другой способ.

Что происходит при касании графика многочлена $f(x)$ с прямой $y=kx+b$? Кривая (график) и прямая имеют общую точку $(x_0;f(x_0))$, т.е. уравнение $f(x)=kx+b$ имеет корень x_0, но этот корень обязательно имеет кратность выше первой!

Например, в случае с касанием прямой и параболы парабола имеет с прямой общую точку, но при переходе через эту общую точку остается по ту же сторону от прямой, т.е. разность $f(x)-(kx+b)$ не меняет знак при переходе через x_0. (Здесь x_0 – корень кратности 2.)

Возникают ассоциации с решением неравенств методом интервалов? А кубическая парабола $y=x^3$, имея касательную $y=0$ (в точке $(0;0)$), переходит с одной ее стороны на другую! (Здесь корень кратности 3.)

Вернемся к нашей задаче. Пусть $y=kx+b$ – искомая прямая. Тогда уравнение $x^4-2x^3+x^2+x-2=kx+b$ по условию задачи должно иметь два различных кратных корня. Степень уравнения – 4, таким образом, оба корня должны быть 2-й кратности. Так как коэффициент при старшей степени переменной равен 1, можно записать следующее равенство с неопределенными коэффициентами (здесь p и q – вышеупомянутые кратные корни):

$$x^4-2x^3+x^2+x-2-kx-b=(x-p)^2(x-q)^2=$$
$$=\left(x^2-2px+p^2\right)\left(x^2-2qx+q^2\right).$$

Запишем систему на коэффициенты при соответствующих степенях переменной x:

$$\begin{cases}-2p-2q=-2,\\ 4pq+p^2+q^2=1,\\ -2pq^2-2qp^2=1-k,\\ p^2q^2=-2-b.\end{cases}$$

Решаем систему из первых двух уравнений:

$$\begin{cases}p+q=1\\ (p+q)^2+2pq=1\end{cases};\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=0\\ q=1\end{cases}\\ \begin{cases}q=0\\ p=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Подставляем найденные p и q в последние два уравнения: $\begin{cases}k=1\\ b=-2.\end{cases}$

Получаем уравнение прямой $y=x-2$.

Желающие могут проверить количество точек касания.

Ответ: $y=x-2$.

Замечание. Прямая $y=kx+b$ является касательной к графику $y=P_n(x)$ в точке с абсциссой a в точности тогда, когда $x=a$ является кратным корнем (кратности выше 1-й) уравнения $P_n(x)=kx+b$.

ЯКУБОВ.РФ

Глава 17. ТЕОРЕМЫ О ПРОИЗВОДНОЙ. МОНОТОННОСТЬ. ЭКСТРЕМУМ. ВЫПУКЛОСТЬ. ПЕРЕГИБ

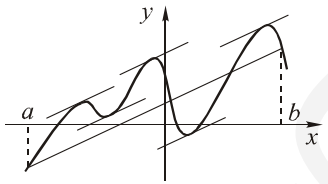
***Теорема* Лагранжа**. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ (в концах отрезка достаточно односторонней непрерывности) и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка c, что*

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(a;f(a)),(b;f(b))$; $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику $y=f(x)$ в точке с абсциссой c.

Теорема утверждает следующее: *у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции существует хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей концы отрезка графика.*



***Теорема* Ролля**. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Пусть также $f(a)=f(b)$. Тогда на интервале $(a;b)$ производная функции f обращается в 0 хотя бы в одной точке.*

(*Если непрерывная на отрезке и дифференцируемая внутри него функция принимает на концах отрезка равные значения, то хотя бы в одной точке интервала касательная к графику функции горизонтальна.)*

Следствие 1. Между двумя корнями дифференцируемой функции всегда есть корень ее производной.

Следствие 2. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $f'(x)\equiv 0$ на интервале $(a;b)$, то f постоянна на $[a;b]$.

Для доказательства заметим, что для любых x_1,x_2 из $[a;b]$ найдется точка $c\in(x_1;x_2)$, такая, что $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, а $f'(c)=0$ по условию.

Следствие 3. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$, $f'(x)\equiv g'(x)$ на интервале $(a;b)$, то на $[a;b]$ $f(x)=g(x)+C$, $C\in R$..

Для доказательства можно рассмотреть функцию $f-g$ и свести задачу к предыдущей.

Следствие 4 (достаточное условие монотонности функции на промежутке).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$.

Если $f'(x)>0$ на $(a;b)$, то f возрастает на $[a;b]$. Если $f'(x)<0$ на $(a;b)$, то f убывает на $[a;b]$.

Переформулировка.

Если на промежутке X функция f дифференцируема, и $f'(x)>0$, то f возрастает на X.

Если на промежутке X функция f дифференцируема, и $f'(x)<0$, то f убывает на X.

Замечание. Точки непрерывности (односторонней, если это граница промежутка) включаются в промежутки монотонности.

Для доказательства рассмотрите знак правой части равенства $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ (см. доказательство следствия 2).

Определение. x_0 называется ***точкой максимума*** (локального), если $\exists O(x_0;\varepsilon)$: $\forall x\in O(x_0;\varepsilon)\cap D_f$ $f(x)\le f(x_0)$ (т.е. найдется такая окрестность точки x_0, что в этой окрестности значение в точке x_0 – самое большое).

Такой максимум называется нестрогим. Можно дать определение строгого максимума ($\exists O(x_0;\varepsilon)$: $\forall x\in O(x_0;\varepsilon)\cap D_f$ $f(x)<f(x_0)$);

О п р е д е л е н и е. x_0 называется ***точкой минимума*** (локального), если $\exists O(x_0;\varepsilon)\colon\ \forall x \in O(x_0;\varepsilon)\bigcap D_f\ \ f(x) \geq f(x_0)$ (т.е. найдется такая окрестность точки x_0, что в этой окрестности значение в точке x_0 – самое маленькое).

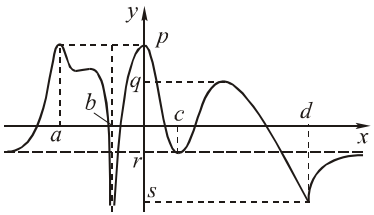
Такой минимум называется нестрогим. Можно дать определение строгого минимума ($\exists O(x_0;\varepsilon)\colon\ \forall x \in O(x_0;\varepsilon)\bigcap D_f\ \ f(x) > f(x_0)$).

✧ **Замечания**.

1. Не путайте максимум с наибольшим значением! Значение в точке максимума превосходит все остальные значения только в некотором интервале вокруг рассматриваемой точки! Аналогично для минимума и наименьшего значения.

2. «Максимум» – значение в точке максимума; «минимум» – значение в точке минимума.

3. Для максимума и минимума есть общее название – «экстремум».



По изображенному графику найти все промежутки возрастания, убывания функции, точки минимума и точки максимума, наибольшее и наименьшее значения функции (если они есть).

О п р е д е л е н и е. Внутренняя точка области определения функции называется ***критической***, если производная функции в этой точке либо не существует, либо равна 0.

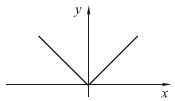
Теорема. **Необходимое условие экстремума** (малая теорема **Ферма**).

Если x_0 – внутренняя точка области определения функции f, и x_0 – точка экстремума, то она критическая.

Замечание. Обратное неверно! Т.е. если точка критическая, то она может быть точкой экстремума, а может и не быть. Приведем простые примеры.

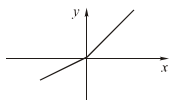
П р и м е р ы

1. $f'(x_0)$ не существует, экстремум в точке x_0 есть:



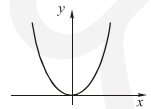
$f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

2. $f'(x_0)$ не существует, экстремума в точке x_0 нет:



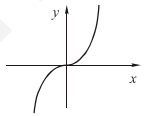
$f(x) = 2x + |x|$, $x_0 = 0$.

3. $f'(x_0) = 0$, экстремум в точке x_0 есть:



$f(x) = x^2$, $x_0 = 0$.

4. $f'(x_0) = 0$, экстремума в точке x_0 нет:



$f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Теорема. **Первое достаточное условие экстремума**.

Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0), и непрерывна в точке x_0.

Если в этой окрестности $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка минимума.

Если в этой окрестности $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка максимума.

Для определенности рассмотрим первое из утверждений.

✧ Действительно, если до точки x_0 производная была отрицательной, то функция убывала; если после точки x_0 производная стала положительной, значит, после точки x_0 функция возрастает. Следовательно, в некоторой окрестности точки x_0 все значения функции больше, чем в точке x_0, т.е. значение в точке x_0 – локально самое маленькое, т.е. x_0 – точка минимума.

✧ Прежде чем ввести понятие выпуклости функции, вспомним, что называется выпуклым плоским многоугольником, и будем определять выпуклость функции по аналогии.

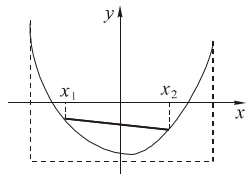
Итак, **два определения** выпуклого многоугольника:

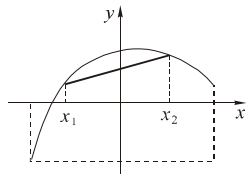
1. Многоугольник называется ***выпуклым***, если любой отрезок, соединяющий точки многоугольника, расположен внутри многоугольника (не выходит за его границы).

2. Многоугольник называется ***выпуклым,*** если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Определение 1. График функции f обращен на промежутке X выпуклостью вниз, если **для любых** точек x_1, x_2 из X график на отрезке $[x_1;x_2]$ расположен не выше хорды, соединяющей точки $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;f(x_2))$.

График функции f обращен на промежутке X выпуклостью вверх, если **для любых** точек x_1, x_2 из X график на отрезке $[x_1;x_2]$ расположен не ниже хорды, соединяющей точки $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;f(x_2))$.





О п р е д е л е н и е 2 (для дифференцируемых функций, т.е. в каждой точке промежутка имеющих касательную). График функции f обращен на промежутке X выпуклостью вниз, если **для любой** точки x_0 из X график на промежутке X расположен не ниже касательной, проведенной в точке $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ (график расположен не ниже любой касательной).

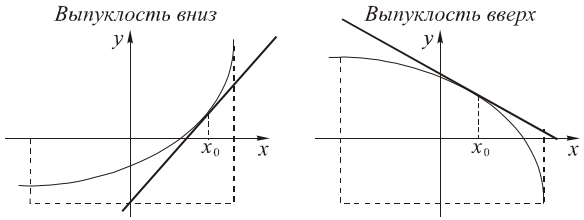
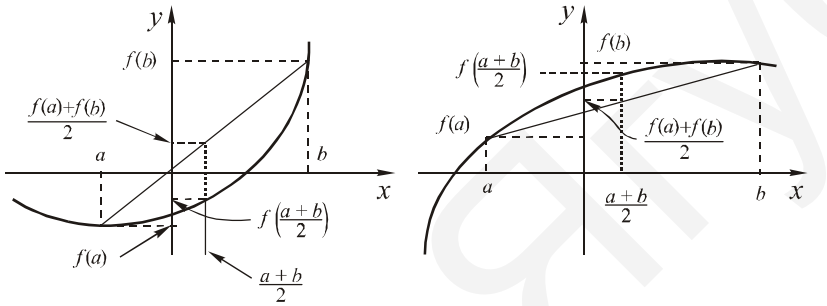


График функции f обращен на промежутке X выпуклостью вверх, если **для любой** точки x_0 из X график на промежутке X расположен не выше касательной, проведенной в точке $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ (график расположен не выше любой касательной).

Замечание. Говорят: «функция выпукла вниз (вверх), или график функции обращен выпуклостью вниз (вверх)».

Рассмотрим график функции, выпуклой на отрезке $[a;b]$ вниз, и график функции, выпуклой на отрезке $[a;b]$ вверх. Отметим среднюю точку $\frac{a+b}{2}$. Сравним значение в средней точке и среднее арифметическое значений в концах отрезка.



В ы в о д: Если функция выпукла вниз на $[a;b]$, то $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$, причем равенство достигается при $a=b$.

В ы в о д: Если функция выпукла вверх на $[a;b]$, то $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$, причем равенство достигается при $a=b$.

Можно ли считать утверждение, обратное приведенному выше, определением выпуклости функции на отрезке?

(«Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$, то функция f выпукла вниз на $[a;b]$; если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$, то функция f выпукла вверх на $[a;b]$».)

Если нет, то как нужно изменить критерий?

О т в е т: Функция f выпукла вниз на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда **для любых** $x_1, x_2 \in [a;b]$ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$; функция f выпукла вверх на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда **для любых** $x_1,\ x_2 \in [a;b]$ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Теорема. **Достаточное условие выпуклости**.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке X дважды, причем $\forall x \in X \quad f''(x) > 0$. Тогда график функции f обращен на промежутке X выпуклостью вниз.

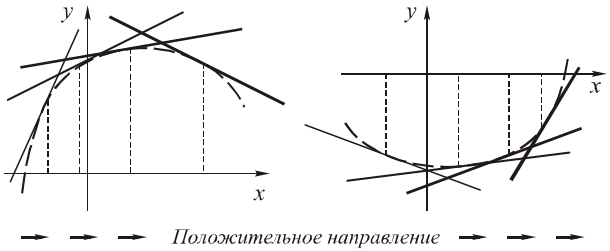
Пусть функция f дифференцируема на промежутке X дважды, причем $\forall x \in X \quad f''(x) < 0$. Тогда график функции f обращен на промежутке X выпуклостью вверх.

Аккуратное доказательство утверждения здесь давать не будем, однако приведем простое рассуждение, позволяющее вспомнить теорему (если Вы случайно забыли, какой знак 2-й производной соответствует какому типу выпуклости). Итак:

Проследив за изменением угла наклона касательных к положительному направлению оси абсцисс, видим, что в первом случае (слева, где график обращен выпуклостью вверх) угол уменьшается по мере продвижения точки касания вправо (увеличения абсциссы), т.е. производная

Ягубов.рф

тангенса угла отрицательна, а во втором случае (справа, где график обращен выпуклостью вниз) угол увеличивается по мере продвижения точки касания вправо, т.е. производная тангенса угла положительна. Тангенс угла наклона касательной – первая производная функции в точке. Если тангенс уменьшается, то производная первой производной функции (вторая производная) отрицательна; если тангенс увеличивается, то вторая производная функции положительна.

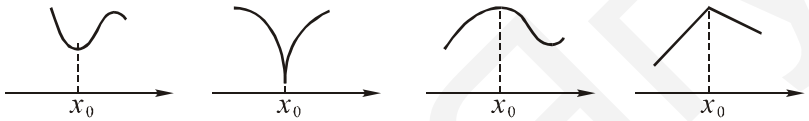


Теорема. **Вторая достаточное условие экстремума**.

Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в точке x_0. Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$. Тогда x_0 – точка минимума функции f.

Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в точке x_0. Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$. Тогда x_0 – точка максимума функции f.

Замечание. Первое (сформулированное ранее) достаточное условие экстремума может давать как «гладкий» экстремум, так и «острый»; второе – только «гладкий».



$f'(x_0)=0$; $f''(x_0)>0$	$f'(x_0)$	$f'(x_0)=0$; $f''(x_0)<0$	$f'(x_0)$
«гладкий» минимум	не существует *«острый» минимум, «излом»*	*«гладкий» максимум*	не существует *«острый» максимум, «излом»*

О п р е д е л е н и е. Точка M гладкой кривой G называется ***точкой перегиба***, если в точке M кривая переходит с одной стороны касательной, проведенной в этой точке, на другую.

Замечание. В точке перегиба меняется тип выпуклости кривой.

Теорема. **Достаточное условие перегиба**.

Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0), и дифференцируема в точке x_0. Если при переходе через точку x_0 f'' меняет знак, то $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба функции f.

П р и м е р ы

5. ***Известно, что многочлен P имеет ровно n различных корней. Сколько корней имеет многочлен P'?***

□ По следствию из теоремы Лагранжа между любыми двумя корнями дифференцируемой функции должен быть хотя бы один корень производной. Тогда P' имеет по крайней мере $(n-1)$ корень. (Конечно, число корней у производной меньше, чем степень самого многочлена P).

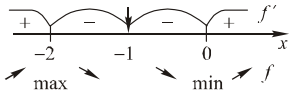
Исследовать на монотонность, экстремумы, выпуклость и перегиб функции:

6. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

□ $D_f = R\setminus\{-1\}$. $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-1x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; $D_{f'}=D_f$.

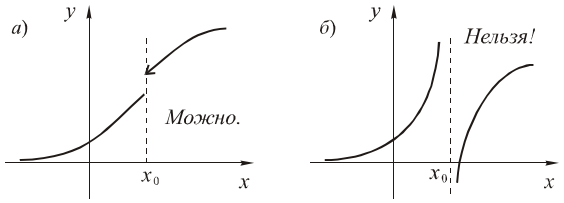
Найдем критические точки функции: $f'(x)=0$: $x=0$, $x=-2$.

По достаточному условию монотонности функции на промежутке f возрастает на $(-\infty;-2]$ и на $[0;\infty)$, убывает на $[-2;-1)$ и на $(-1;0]$.



Замечания.

1. При ответе на вопрос о промежутках монотонности никогда нельзя автоматически объединять находящиеся рядом промежутки! Если они разделены точкой непрерывности функции, то объединить можно; если же между ними точка разрыва – скорее всего, объединить промежутки в один нельзя. Чтобы сказать точно, нужно исследовать поведение функции в окрестности точки разрыва.



Покажем на примерах (обратите внимание на промежутки до и после точки x_0):

Поэтому советуем **не объединять** промежутки монотонности в случае разрыва.

2. Критические точки функции, являющиеся граничными точками промежутков монотонности, включаются в промежутки монотонности, если это точки непрерывности функции (хотя бы соответствующей односторонней). Ничего страшного, если одна и та же точка входит и в промежуток возрастания, и в промежуток убывания функции.

По достаточному условию экстремума $x=-2$ – точка максимума, $f(-2)=\dfrac{(-2)^2}{-2+1}=-4$; $x=0$ – точка минимума, $f(0)=\dfrac{(0)^2}{0+1}=0$.

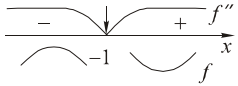
3. Ничего удивительного в том, что значение в точке максимума меньше значения в точке минимума: ведь это **локальные** экстремумы!

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2\left((x+1)^2-(x^2+2x)\right)}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^3}. \qquad D_{f''}=D_f.$$

4. Проводя преобразования f'', мы сократили (разделили числитель и знаменатель дроби) на выражение $(x+1)$ и вынесли 2 за скобки в числителе. Если в подобных примерах вовремя не сократить (на все то, что можно) и не вынести (все, что можно) за скобки, то жизнь значительно усложняется, и решающий рискует вообще не найти критические точки или корни второй производной, во всяком случае, потеряет много времени на разложение на множители многочленов высокой степени.

Найдем критические точки второго рода (корни второй производной или точки области определения функции, где она не является дважды дифференцируемой):



$$f''(x)=0:\quad 2\neq 0.$$

По достаточному условию выпуклости график функции обращен выпуклостью вниз на $(-1;\infty)$, выпуклостью вверх на $(-\infty;-1)$. Точек перегиба нет.

7. $g(x)=4x^2\sqrt{1-4x}$.

□ $D_g=\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]$.

$$g'(x)=8x\sqrt{1-4x}+4x^2\frac{-4}{2\sqrt{1-4x}}=8x\sqrt{1-4x}-\frac{8x^2}{\sqrt{1-4x}}=$$

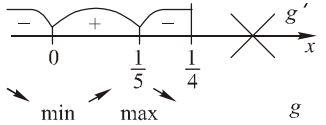
$$=\frac{8x(1-4x-x)}{\sqrt{1-4x}}=\frac{8x(1-5x)}{\sqrt{1-4x}}; \qquad D_{g'}=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right).$$

Замечания.

1. См. замечание из предыдущего примера! («Не преобразуешь вовремя – запутаешься»).

2. Здесь области определения функции и производной не совпадают, так как (конечной) производной в граничной точке D_g – точке $1/4$ – не существует. Что же происходит в точке $1/4$? На самом деле, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}-0} g'(x)=-\infty$. Надеемся, что читатель помнит геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона касательной. Значит, наша функция в точке $1/4$ имеет (одностороннюю) **вертикальную** касательную!

Критические точки функции:



$x=0,\ x=1/5$.

По достаточному условию монотонности g возрастает на $\left[0;\dfrac{1}{5}\right]$, убывает на $(-\infty;0]$ и на $\left[\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{4}\right]$.

По достаточному условию экстремума $x=0$ – точка минимума, $x=\dfrac{1}{5}$ – точка максимума. $g(0)=0;\ g\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{4}{25}\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}=\dfrac{4}{25\sqrt{5}}$.

$$g''(x)=\left(\frac{8x(1-5x)}{\sqrt{1-4x}}\right)'=\frac{8(1-10x)\sqrt{1-4x}-8x(1-5x)\frac{-4}{2\sqrt{1-4x}}}{1-4x}=$$

$$=\frac{8\left((1-10x)(1-4x)+2x(1-5x)\right)}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}=\frac{8\left(30x^2-12x+1\right)}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}.$$

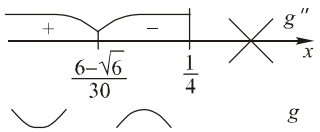
$$g''(x)=0:\ x=\frac{6\pm\sqrt{6}}{30}. \qquad \frac{6-\sqrt{6}}{30}<\frac{6}{30}=\frac{1}{5}<\frac{1}{4}.$$

Сравним $\frac{6+\sqrt{6}}{30}$ с $\frac{1}{4}$:

$4\left(6+\sqrt{6}\right)-30=24+4\sqrt{6}-30=4\sqrt{6}-6=2\left(\sqrt{24}-\sqrt{9}\right)>0$, т.е.

$$\frac{6+\sqrt{6}}{30}>\frac{1}{4}. \quad g''(x)=0: \ x=\frac{6-\sqrt{6}}{30}.$$

По достаточному условию выпуклости график $y=g(x)$ обращен



выпуклостью вниз на $\left(-\infty;\frac{6-\sqrt{6}}{30}\right]$,

выпуклостью вверх на $\left[\frac{6-\sqrt{6}}{30};\frac{1}{4}\right]$.

По достаточному условию перегиба точка $\left(\frac{6-\sqrt{6}}{30};g\left(\frac{6-\sqrt{6}}{30}\right)\right)$ – точка перегиба.

8. (*в*) $h(x)=e^x\sin x$.

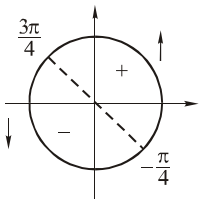
□ $D_h=R$;

$h'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x\left(\sin x+\cos x\right)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; $\quad D_{h'}=R$.

Критические точки: $h'(x)=0$; $\sqrt{2}e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$;

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Так как критические точки расположены через π друг от друга по всей числовой прямой, причем знаки производной на соседних промежутках чередуются



(меняется знак $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$), то можно изобразить промежутки знакопостоянства производной на тригонометрическом круге (хотя сама функция не является периодической!!!). Если эта идея Вам не нравится, можно изобразить часть числовой прямой и пронаблюдать закономерность.

По достаточному условию монотонности:

h возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$,

h убывает на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

По достаточному условию экстремума $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z$ – точки минимума; $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi l,\ l\in Z$ – точки максимума.

$$h''(x)=\left(e^x\left(\sin x+\cos x\right)\right)'=$$

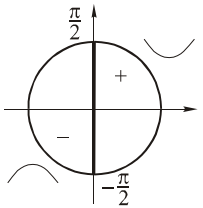
$$=e^x\left(\sin x+\cos x\right)+e^x\left(\cos x-\sin x\right)=2e^x\cos x; \quad D_{h''}=R.$$

$$h''(x)=0: \ \cos x=0; \ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

По достаточному условию выпуклости график функции обращен:

выпуклостью вниз на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$;

выпуклостью вверх на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi m\right]$, $m\in Z$.



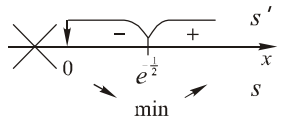
По достаточному условию перегиба точки $\left(\frac{\pi}{2}+\pi l;h\left(\frac{\pi}{2}+\pi l\right)\right)$, $l\in Z$ – точки перегиба.

9. (*в*) ***Исследовать на монотонность, экстремумы, выпуклость и перегиб функцию*** $s(x)=x^2\ln x$.

□ $D_s=(0;\infty)$. $s'(x)=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=x\left(2\ln x+1\right)$; $D_{s'}=D_s$.

Критические точки: $s'(x)=0$;

$x\left(2\ln x+1\right)=0$; $x\left(2\ln x+1\right)=0$; $x=e^{-1/2}$.

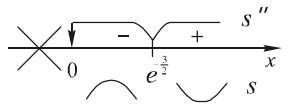


По достаточному условию монотонности s возрастает на $\left[e^{-1/2};\infty\right)$, убывает на $(0;e^{-1/2}]$. По достаточному условию экстремума $x=e^{-1/2}$ – точка минимума. $s(e^{-1/2})=-1/2e$.

$$s''(x)=(x\left(2\ln x+1\right))'=\left(2x\ln x+x\right)'=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1=2\ln x+3;$$

$$D_{s''}=D_s. \quad s''(x)=0: \ \ln x=-3/2; \ x=e^{-3/2}.$$

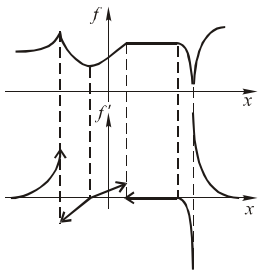
По достаточному условию выпуклости график $y=s(x)$ обращен выпуклостью вниз на $\left[e^{-3/2};\infty\right)$, вверх – на $\left(0;e^{-3/2}\right]$.



По достаточному условию перегиба $\left(e^{-3/2};-3/2e^3\right)$ – точка перегиба.

Глава 18. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Мы надеемся, что читатель помнит связь функции и производной. Попробуем изобразить (эскизные!) графики функции и ее производной один под другим так, чтобы было видно соответствие.



Например, если на каком-либо участке f возрастает и выпукла вниз, то f' положительна и возрастает (так как $(f')' = f'' > 0$); если на графике f излом, то f' имеет в этой точке разрыв; если у f в некоторой точке вертикальная касательная, то f' при этом значение x уходит на бесконечность, и т.д.

Общая схема исследования функции

1. Область определения.
2. Особые свойства функции: четность или нечетность, периодичность.
3. Корни, промежутки знакопостоянства.
4. Непрерывность, характер точек разрыва (односторонние пределы), пределы на бесконечности.
5. Асимптоты.
6. Производная, исследование функции на монотонность и экстремумы.
7. Вторая производная, исследование функции на выпуклость и перегиб.
8. Нахождение значений функции и ее производной в характерных точках (пересечения с осями координат, экстремума, перегиба), нахождение нескольких дополнительных точек графика (не обязательно, но используется для построения более точного графика).
9. Построение эскиза графика.

Примеры

1. ***Провести полное исследование с построением эскиза графика функции*** $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

□ 1. $D_f = R \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

2. Функция непериодическая; D_f симметрична относительно 0. (Есть смысл далее исследовать на четность!) $f(-x) = \dfrac{-x^3}{3 - x^2} = -f(x)$; функция нечетная.

Замечания.

1. Если бы область определения не была симметрична относительно 0, то мы сразу бы написали: «Функция общего вида (т.е. не является ни четной, ни нечетной)».

2. А что делать, например, с функцией $y = \dfrac{x+4}{2 - x + x^2}$? Одна из наиболее часто повторяющихся ошибок – исследовать такую функцию на четность и нечетность следующим образом:

~~$D_y = R$ – симметрична относительно 0;~~

~~$y(-x) = \dfrac{-x+4}{2 + x + x^2} \neq y(x),\ \neq -y(x)$. Функция общего вида.~~

Задумаемся, что здесь написано. Что означают эти строки? Неравенства, которые предлагается решить проверяющему? При каких x верно написанное? Неужели ни при каких, и это так уж очевидно? Или же человек руководствовался соображением, что если формула не похожа, то и функция не та? А вдруг после преобразований, которые мы не провели (или не умеем провести) формула станет похожа на $y(x)$ или $-y(x)$?

Приведем один классический пример.

Исследуем на четность и нечетность функцию

$$g(x) = \log_3\left(\sqrt{16x^2 + 9} - 4x\right) - 1.$$

$\sqrt{16x^2 + 9} > \sqrt{16x^2} = 4|x| \geq 4x$, так что $D_g = R$ – симметрична относительно 0.

$$g(-x) = \log_3\left(\sqrt{16x^2 + 9} + 4x\right) - 1.$$

Формула другая, но если мы сделаем вывод, что функция общего вида, то ошибемся.

Действительно, попробуем сложить $g(x)$ и $g(-x)$ (если получим 0 при всех x, то функция нечетная, не так ли?)

$$g(x) + g(-x) = \log_3\left(\sqrt{16x^2 + 9} - 4x\right) - 1 + \log_3\left(\sqrt{16x^2 + 9} + 4x\right) - 1 =$$

$$= \log_3\left(\left(16x^2 + 9\right) - 16x^2\right) - 2 = \log_3 9 - 2 \equiv 0.$$

Функция g оказалась нечетной!

Но мы же совершенно уверены, что функция $y = \dfrac{x+4}{2 - x + x^2}$ – общего вида. Как же обосновать свое мнение? Очень просто – привести контрпример, т.е. найти пару противоположных значений x, где значения функции не равны, и найти пару противоположных значений x, где значения функции не противоположны

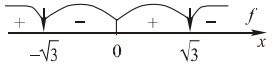
Ягубов Р.Р.

(если можно, то найти одну пару противоположных значений x, где значения функции различны по модулю). Мы ведь не доказываем свойство четности или нечетности, а опровергаем!

В нашем случае, например, $y(-4)=0,\ y(4)=4/7\neq 0$, т.е. функция общего вида.

Возвращаемся от нашего «лирического отступления» к исследованию функции f.

3. $f(x)=0$: $x=0$. Промежутки знакопостоянства функции:



4. f непрерывна на D_f как рациональная.

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0} f(x)=+\infty$. (Маленький секрет: что предел бесконечен, это очевидно. А знак мы взяли с предыдущей картинки! Ведь если при $x<-\sqrt{3}$ функция положительна, она не может иметь предел, равный $-\infty$, в точке $-\sqrt{3}$ слева).

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;$$

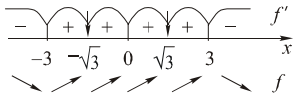
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

5. Вертикальные асимптоты $x=\pm\sqrt{3}$; горизонтальных нет (см. пределы в п. 4.); ищем наклонные.

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{(3-x^2)(-x)+3x}{3-x^2}=-x+\frac{3x}{3-x^2};$$

наклонная асимптота $y=-x$.

6. $f'(x)=\dfrac{3x^2(3-x^2)-(-2x)x^3}{(3-x^2)^2}=\dfrac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2}=\dfrac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$;



$D_{f'}=D_f$.

Критические точки:

$f'(x)=0$: $x=0, x=\pm 3$.

Промежутки знакопостоянства производной:

По достаточному условию монотонности f возрастает на $(-3;-\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};0)$; $(0;\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};3)$; убывает на $(-\infty;-3)$; $(3;\infty)$.

Теперь включим в промежутки точки непрерывности.

Промежутки возрастания: $[-3;-\sqrt{3}]$; $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(\sqrt{3};3]$;

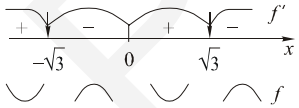
убывания: $(-\infty;-3]$; $[3;\infty)$.

По достаточному условию экстремума –3 – точка минимума;
3 – точка максимума.

$$f(-3)=4{,}5;\ f(3)=-4{,}5.$$

7. $f''(x)=\left(\dfrac{9x^2-x^4}{(x^2-3)^2}\right)'=\dfrac{(18x-4x^3)(x^2-3)^2-2(x^2-3)2x x^2(9-x^2)}{(x^2-3)^4}=$

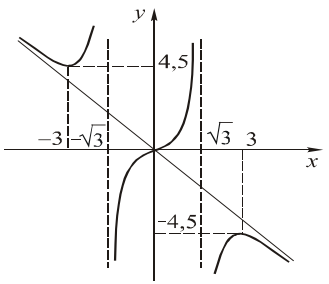
$=\dfrac{2x\left((9-2x^2)(x^2-3)-2x^2(9-x^2)\right)}{(x^2-3)^3}=\dfrac{2x(-3x^2-27)}{(x^2-3)^3}=\dfrac{-6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$.



$D_{f''}=D_f$.

$f''(x)=0$:

$x=0$.



Промежутки знакопостоянства второй производной:

По достаточному условию выпуклости график $y=f(x)$ обращен выпуклостью вниз на $(-\infty;-\sqrt{3})$; $[0;\sqrt{3})$, вверх – на $(-\sqrt{3};0]$; $(\sqrt{3};\infty)$.

По достаточному условию перегиба $(0;0)$ – точка перегиба.

8. Определим, под каким углом проходит касательная к графику в начале координат, $f'(0)=0$, т.е. касательной в точке $(0;0)$ является ось абсцисс.

2. ***Провести полное исследование с построением эскиза графика функции***

$y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x+3}-2$.

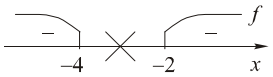
□ 1. D_f: $\begin{cases}x^2+6x+8\geq 0\\ x\neq -3;\end{cases}$ $D_f=(-\infty;-4]\cup[-2;\infty)$.

2. Функция непериодическая; D_f не симметрична относительно 0, функция общего вида.

3. $f(x)=0$: $\sqrt{x^2+6x+8}=2x+6$; $\begin{cases}x^2+6x+8=4x^2+24x+36\\ x+3>0.\end{cases}$

Корней нет.

Промежутки знакопостоянства функции:



4. f непрерывна на $(-\infty;-4)\cup(-2;\infty)$, в точке $x=-4$ f непрерывна слева, в точке $x=-2$ – справа. $f(-4)=f(-2)=-2$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}-2\right)=-3;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}-2\right)=-1.$$

5. Вертикальных асимптот нет, горизонтальные: $y=-3$ – левосторонняя, $y=-1$ – правосторонняя.

6. $$f'(x)=\frac{\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+8}}(x+3)-\sqrt{x^2+6x+8}}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{(x+3)^2-(x^2+6x+8)}{\sqrt{x^2+6x+8}(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2\sqrt{x^2+6x+8}};$$

$D_{f'}=(-\infty;-4)\cup(-2;\infty)$. Производная корней не имеет, т.е. критических точек нет.

Комментарий. Очевидно, в точках $-4,-2$ функция определена, обладает односторонней непрерывностью, но не является дифференцируемой. Что же происходит в этих точках? Предел производной при $x\to\pm\infty$ бесконечен, значит, односторонняя касательная в указанных граничных точках области определения существует и вертикальна.

Промежутки знакопостоянства производной:

$$f'(x)>0 \quad \forall x\in(-\infty;-4)\cup(-2;\infty).$$

По достаточному условию монотонности f возрастает на $(-\infty;-4)$; $(-2;\infty)$. Промежутки возрастания: $(-\infty;-4]$; $[-2;\infty)$.

$x=-4$ – точка максимума, $x=-2$ – точка минимума.

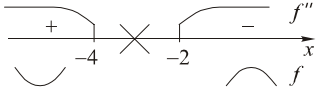
7. $$f''(x)=-\frac{1}{(x+3)^4(x^2+6x+8)}\times$$

$$\times\left(2(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}+(x+3)^2\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+8}}\right)=-\frac{2(x^2+6x+8)+(x+3)^2}{(x+3)^3(x^2+6x+8)\sqrt{x^2+6x+8}}=$$

$$=-\frac{2x^2+12x+16+x^2+6x+9}{(x+3)^2(x^2+6x+8)\sqrt{x^2+6x+8}}=-\frac{3x^2+18x+25}{(x+3)^2(x^2+6x+8)\sqrt{x^2+6x+8}};$$

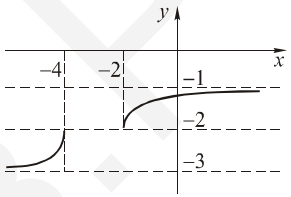
$$D_{f''}=D_{f'}.$$

Вторая производная корней не имеет. Промежутки знакопостоянства второй производной.



По достаточному условию выпуклости график $y=f(x)$ обращен выпуклостью вниз на $(-\infty;-4]$; вверх на $[-2;\infty)$. Точек перегиба нет.

9. Эскиз графика.



Замечание.

$$y=\frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{x+3}-2=\frac{\sqrt{(x+3)^2-1}}{(x+3)}-2;$$

$$(y+2)=\frac{\sqrt{(x+3)^2-1}}{(x+3)}.$$

График $y=f(x)$ получается сдвигом на вектор $\overline{(-3;-2)}$ из графика функции $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, которая является нечетной, и график которой симметричен относительно начала координат. Тогда график $y=f(x)$ **симметричен относительно точки** $(-3;-2)$. Можно убедиться, обратившись к чертежу!

3. (*в*) ***Провести полное исследование с построением эскиза графика функции*** $y=xe^{-1/x}$.

□ $y=f(x)=xe^{-1/x}$.

1. $D_f=R\setminus\{0\}$.

2. Функция непериодическая; D_f симметрична относительно 0.

$y=f(-x)=-xe^{1/x}$. $f(1)=\frac{1}{e}; f(-1)=-e.$ Функция общего вида.

3. $f(x)=0$: $x=0\notin D_f$. Корней нет. Знак $f(x)$ совпадает со знаком x.

4. f непрерывна на D_f.

$$\lim_{x\to0-0} f(x)=\lim_{x\to0-0}\left(xe^{-1/x}\right)=\lim_{t=-\frac{1}{x}\to+\infty}\frac{-e^t}{t}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(xe^{-1/x}\right) = \lim_{t=\frac{1}{x}\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t} = 0;$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(xe^{-1/x}\right) = \lim_{t=-\frac{1}{x}\to 0+0} \frac{-e^{t}}{t} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(xe^{-1/x}\right) = \lim_{t=\frac{1}{x}\to 0+0} \frac{e^{-t}}{t} = +\infty.$$

5. $x=0$ – левосторонняя вертикальная асимптота;

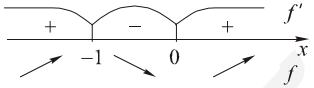
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-1/x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\left(e^{-1/x}-1\right)\right) = \lim_{t=\frac{1}{x}\to 0}\left(-\frac{e^{-t}-1}{-t}\right) = -1.$$

$y = x-1$ – наклонная (двусторонняя) асимптота.

6. $f'(x) = e^{-1/x} + x\left(e^{-1/x}\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^{-1/x}\frac{x+1}{x}$; $D_{f'} = D_f$.

Критические точки: $x=-1$. Промежутки знакопостоянства производной.



По достаточному условию монотонности f возрастает на $(-\infty;-1)$; $(0;\infty)$; убывает на $(-1;0)$.

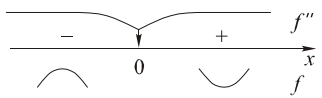
Теперь включим в промежутки точки непрерывности.

Промежутки возрастания: $(-\infty;-1]$; $(0;\infty)$; убывания: $[-1;0)$.

По достаточному условию экстремума -1 – точка максимума. $f(-1) = -e$.

7. $f''(x) = e^{-1/x}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right) + e^{-1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}$;

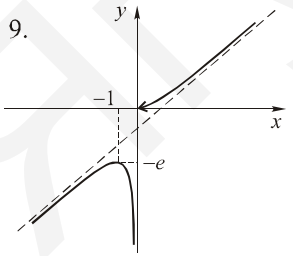
$D_{f''} = D_f$.



f'' корней не имеет.

По достаточному условию выпуклости график $y=f(x)$ обращен выпуклостью вниз на $(0;\infty)$; вверх на $(-\infty;0)$. Точек перегиба нет.

9.



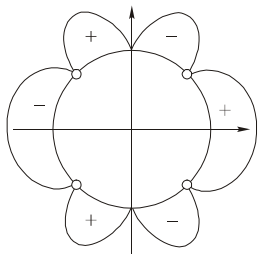
Заметим, что график функции был построен ранее на основании сведений об асимптотах и промежутках знакопостоянства. С помощью производной мы убедились в правильности построений и уточнили эскиз графика.

4. ***Провести полное исследование с построением эскиза графика функции*** $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

□ 1. D_f: $\cos 2x \neq 0$; $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

$$D_f = R \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in Z\right\}.$$

2. $T = 2\pi$ – период функции f.



Дальше есть два способа действий.

1-й с п о с о б.

Исследуем функцию на одном периоде, например, на отрезке $[-\pi;\pi]$, после чего работаем только в пределах указанного промежутка.

Замечание. Вообще говоря, период функции – полуинтервал длины 2π, например, $[-\pi;\pi)$. Отрезок был взят только для удобства исследования, на нем значения функции, производной и т.д. в конечных точках дублируются.

2-й с п о с о б.

Заметив, что 2π – период функции, далее работаем на круге, отмечая на нем все, кроме графика.

D_f симметрична относительно 0 (точки «выбрасываются парами»).

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-2x)} = \frac{\cos x}{\cos 2x} = f(x),\ \text{т.е. } f \text{ – четная.}$$

3. **Замечание**. Начиная с этого момента, можно работать с функцией как с обычной тригонометрической, а можно выразить ее через $\cos x$, после чего решать все уравнения и брать производную от сложной функции.

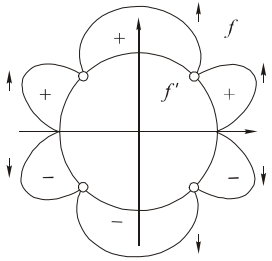
$$f(x)=0:\ \begin{cases}\cos x = 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases}\ \begin{cases}\cos x = 0\\ 2\cos^2 x - 1 \neq 0\end{cases}\ \cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m\in Z.$$

4. На D_f функция непрерывна как отношение непрерывных функций.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0} f(x) = \mp\infty;\quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}\pm 0} f(x) = \mp\infty;\quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}\pm 0} f(x) = \pm\infty;\quad \lim_{x\to-\frac{3\pi}{4}\pm 0} f(x) = \pm\infty.$$

Так как функция периодическая, то пределов на бесконечности нет.

5. Вертикальные асимптоты $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. Наклонных и горизонтальных нет.



6. $f'(x)=\frac{-\sin x\cos 2x+2\sin 2x\cos x}{\cos^2 2x}=$

$=\frac{\sin x\left(1-2\cos^2 x+4\cos^2 x\right)}{\cos^2 2x}=$

$=\frac{\sin x\left(2\cos^2 x+1\right)}{\cos^2 2x}$;

$D_{f'}=D_f$.

Критические точки: $\sin x=0;\ x=\pi k,\ k\in Z$.

По достаточному условию монотонности f возрастает на

$\left(2\pi m;\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m;\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi m;\pi+2\pi m\right)$, $m\in Z$;

убывает на $\left(-\pi+2\pi m;-\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right)$; $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi m;-\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi m;2\pi m\right)$, $m\in Z$.

По достаточному условию экстремума $x=2\pi m$ – точки минимума; $x=\pi+2\pi m$ – точки максимума.

7. $f'(x)=\frac{\sin x\left(2\cos^2 x+1\right)}{\cos^2 2x}=\frac{\sin x\left(3-2\sin^2 x\right)}{\left(1-2\sin^2 x\right)^2}$;

$$g(t)=\frac{t\left(3-2t^2\right)}{\left(2t^2-1\right)^2};\quad t=\sin x,\quad f(x)=g(\sin x).$$

Тогда $f''(x)=g'(\sin x)(\sin x)'=g'(\sin x)\cos x$.

$$g'(t)=\frac{\left(3-6t^2\right)\left(2t^2-1\right)^2-2\left(2t^2-1\right)4t^2\left(3-2t^2\right)}{\left(2t^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{-3\left(2t^2-1\right)^2-8t^2\left(3-2t^2\right)}{\left(2t^2-1\right)^3}=\frac{4t^4-12t^2-3}{\left(2t^2-1\right)^3};$$

$f''(x)=0$: $\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 4\sin^4 x-12\sin^2 x-3=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin^2 x=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

$\cos x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

$\frac{3+2\sqrt{3}}{2}>\frac{3}{2}>1;\ \frac{3-2\sqrt{3}}{2}<0$.

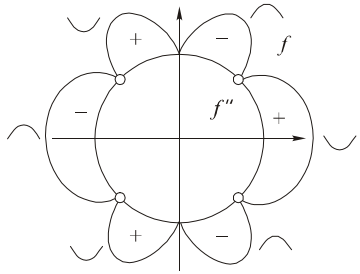
Знак второй производной совпадает со знаком $\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

По достаточному условию выпуклости график обращен выпуклостью вверх на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi\right]$;

$\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; вниз на $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$;

$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$;

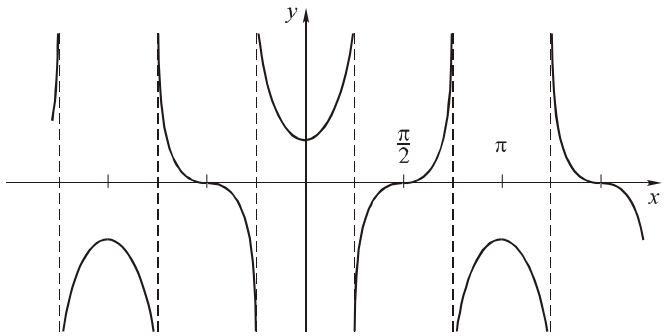
$\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.



По достаточному условию перегиба точки $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;0\right)$;$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;0\right)$ – точки перегиба.

8. $f(2\pi n)=1;\ f(\pi+2\pi n)=-1$.

9.



Глава 19. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Дорогой читатель! Теоретический материал этого раздела мы предлагаем разобрать в форме вопросов и ответов. Это означает, что вы, увидев знак **<??? >**, пробуете самостоятельно ответить на поставленный вопрос, а лишь затем читаете продолжение текста, в котором содержится ответ. Договорились? Тогда начинаем.

Нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции с конечным числом точек разрыва на промежутке

Замечание. Промежуток может содержать или не содержать точки разрыва функции, быть открытым или замкнутым, ограниченным или неограниченным.

А) Пусть f – любая дифференцируемая на промежутке X функция (в концах промежутка требуется только односторонняя непрерывность), $X=[a;b]$.

<???> В каких точках может достигаться наибольшее (наименьшее) значение функции на X?

О т в е т : это могут быть точки экстремума (а мы знаем, что они являются критическими!) или концы отрезка.

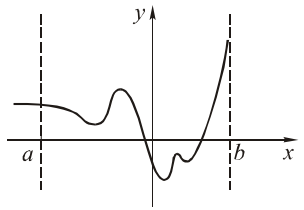
<???> Выведите самый простой алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Выводим алгоритм: – найти критические точки f на X;
– сравнить значения функции в критических точках и в концах отрезка.

Б) <???> Как можно упростить вычисления, если нужно найти только наименьшее или только наибольшее значение?

О т в е т : нужно расставить знаки производной и вычислять значения только в точках экстремума соответствующего наименования, а не во всех критических точках.

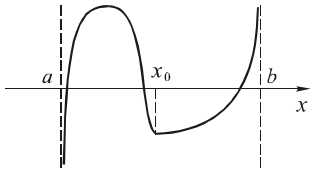
В) Пусть X – интервал, полуинтервал или бесконечный промежуток, или же X содержит точки разрыва функции.



<???> Чем здесь отличаются наши действия от действий в п. **А**)?

О т в е т : необходимо вычислить пределы функции в открытых концах промежутка и в точках разрыва. Пример: см. график.

Г) <???> Верно ли утверждение: «Если x_0 – единственная точка минимума (максимума) функции f на промежутке X, то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение функции f на X»?



О т в е т : Нет, например: см. график.

Д) <???> Как следует исправить предыдущее утверждение, чтобы оно стало верным?

О т в е т : Например, так: «Если x_0 – единственная точка экстремума непрерывной функции f на промежутке X, причем она является точкой минимума (максимума), то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение f на X».

Е) <???> Пусть $f(x)=x^2$. Подберите такие промежутки, чтобы на них у функции $f(x)$:

1) было наименьшее и наибольшее значения;
2) не было ни того, ни другого;
3) было наименьшее, но не было наибольшего значения;
4) п. 3 – наоборот.

О т в е т : например, такие: 1) любой отрезок; 2) $(1;3)$; 3) $(-4;9)$, или $(-5;2]$, или R; 4) $[-10;-4)$.

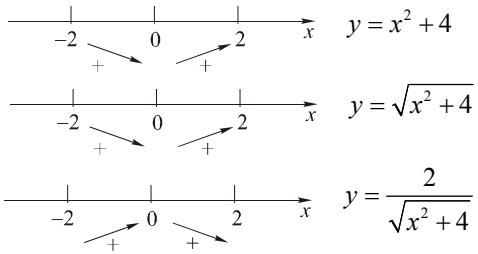
Примеры случаев, когда взятия производной можно избежать:

Ж) Требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке, если функция хорошо исследуется элементарными средствами.

<???> $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$, $X=[-2;2]$.

Найдите $\min\limits_X f(x)$, $\max\limits_X f(x)$.

□ Сконструируем заданную функцию в несколько этапов, каждый раз определяя промежутки законопостоянства и характер монотонности.



$y = x^2 + 4$

$y = \sqrt{x^2 + 4}$

$y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$\left(0 \in [-2;2]\right) \Rightarrow \left(\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(0) = 1\right)$.

Заметим, что $f(x)$ – четная, а промежуток X симметричен относительно 0. Тогда $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(2) = 1/\sqrt{2}$.

З) Требуется найти наименьшее значение функции, очевидно ограниченной снизу (наибольшее значение функции, ограниченной сверху), например, есть соответствующее неравенство, *и это значение достигается на промежутке* (в отличие, например, от $1/x^2$).

<???> $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + x^2, X = [1;10)$. Найти $\min\limits_X f(x)$.

□ Из неравенства Коши $\left(3/x^2\right) + x^2 \geq 2\sqrt{\left(3/x^2\right)x^2} = 2\sqrt{3}$. Заметим, что равенство достигается при $\dfrac{3}{x^2} = x^2$, т.е. $x = \pm\sqrt[4]{3}$. $\sqrt[4]{3} \in X$.

О т в е т : $2\sqrt{3}$.

И) Легко находятся точки возможного экстремума.

<???> $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \dfrac{(x-5)^2}{|x-5|}$, $X_1 = [-1;4]$;

$X_2 = [-1;6)$. Найти $\min\limits_X f(x), \max\limits_X f(x)$.

□ $f(x) = |x-1| + |x-5|$, $x \neq 5$.

$5 \notin X_1$, т.е. на X_1 $f(x) = |x-1| + |x-5|$. Графиком $f(x)$ на X_1 является ломаная, *экстремумы могут быть только в «точках стыка»* (если, конечно, нет постоянных участков. В данном случае есть, но наибольшее

или наименьшее значения достигаются, в частности, и в точках излома, так что на ответ это повлиять не может).

$f(-1) = 8;\ f(4) = 4;\ f(1) = 4$.

О т в е т : $\min\limits_{X_1} f(x) = 4;\ \max\limits_{X_1} f(x) = 8$.

Кстати, заметим, что выражение $|x-1| + |x-5|$ интерпретируется как сумма расстояний от числа x до 1 и до 5, а эта сумма не может быть менее $|5-1| = 4$. Таким образом, если в задаче спрашивается только наименьшее значение, и если в рассматриваемый промежуток входит хоть одно число из отрезка $[1;5]$, то ответ – число 4.

$5 \in X_2$, т.е. нужно вычислить два предела: в точке 5 и в точке 6 (так как промежуток является полуинтервалом).

$f(-1) = 8;\ f(1) = 4$. $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 5 \\ |x-1|, & x = 5. \end{cases}$ $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 5} f(x) = f_1(5) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 6} f(x) = f(6) = 6. \end{matrix}$

О т в е т : $\min\limits_{X_2} f(x) = 4;\ \max\limits_{X_2} f(x) = 8$.

К) Еще один случай, когда не нужно ни находить критические точки, ни вычислять пределы: если точно известно, что данная функция на указанном промежутке принимает все возможные значения. Например, функция периодическая, и промежуток содержит полный период. Тогда задача сводится к отысканию множества значений функции.

<???> $f(x) = \{x + 1,79\}$, $X = \left[\sqrt{2};5\right)$.

Найти $\min\limits_X f(x)$, $\max\limits_X f(x)$.

□ Заметим, что график $f(x)$ получается из графика $y = \{x\}$ («дробная часть x») сдвигом, следовательно, $f(x)$ принимает все свои значения – числа множества $[0;1)$ – на любом полуинтервале длины 1. Найдем длину X: $5 - \sqrt{2} > 5 - 2 > 1$.

О т в е т : наименьшее значение 0, наибольшего значения не существует.

Л) Функция является суммой нескольких функций, одновременно (в одной и той же точке) принимающих наибольшее (наименьшее) значение. Тогда функция-сумма тоже принимает свое наибольшее (наименьшее) значение в той же точке. Точно так же можно найти наибольшее (наименьшее) значение произведения **положительных** функций.

ЯГУБОВ.РФ

<???> Найти $\max f(x)$, где $f(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^6}-\sqrt[7]{x^2-2x}$.

□ $f(x)=g(x)+h(x)$, где $g(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^6}$, $h(x)=\sqrt[7]{x^2-2x}$. Исследуем на наибольшее значение отдельно каждую из функций-слагаемых.

1. Заметим, что при $x\le 0$ $g(x)\le 0$, но $g(x)$ может принимать и положительные значения. Значит, при $x\le 0$ $g(x)$ не может достигать наибольшего значения. Дальше считаем $x>0$. Если x отлично от 0, то на x можно делить.

Воспользуемся основным свойством дроби и разделим числитель и знаменатель дроби на x^3: $g(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^6}=\dfrac{2}{\frac{1}{x^3}+x^3}$. В знаменателе образовалась сумма двух взаимно обратных положительных величин, наименьшее значение которой равно 2 (оно достигается при $1/x^3=x^3$, т.е. $x=1$). Тогда $\max g(x)=g(1)=2/2=1$.

2. $h(x)$ будет принимать наибольшее значение, если $-h(x)=\sqrt[7]{x^2-2x}$ будет наименьшим, т.е. подкоренное выражение $x^2-2x=(x-1)^2-1$ будет наименьшим, а это произойдет при $x=1$.

$$\max h(x)=h(1)=-\sqrt[7]{1-2}=-(-1)=1.$$

3. Очень важно, что $g(x)$ и $h(x)$ принимают наибольшие значения в одной точке (точнее, *пересечение множеств точек, в которых значения обеих функций максимальны*, непусто!). Иначе максимальное значение суммы не совпадало бы с суммой максимальных значений слагаемых.

Итак, $\max f(x)=f(1)=\max g(x)+\max h(x)=1+1=2$.

О т в е т : наибольшее значение функции f равно 2.

<???> Найти наибольшее значение функции $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos 8x\right)+\operatorname{arcctg}(\sin 3x)$, а также все значения x, при которых оно достигается.

□ Найдем наибольшее значение каждого из слагаемых по отдельности. Вдруг нам повезет, и найдутся такие значения аргумента, при которых оба слагаемых сразу будут принимать свои наибольшие значения?

(Заметьте, что, вообще говоря, условие максимальности **каждого** слагаемого **не является необходимым** для достижения суммой своего наибольшего значения, но является **достаточным**!)

$y=\operatorname{arctg}x$ – возрастающая функция на R; $y=\operatorname{arcctg}x$ – убывающая функция на R.

(Ни в коем случае НЕ ПИШЕМ, что, например, $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos 8x\right)$ возрастает на R, – это будет просто неверно!)

Тогда $\max\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\cos 8x\right)=\operatorname{arctg}\left(\max\left(\sqrt{3}\cos 8x\right)\right)=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, достигается это значение при условии $\cos 8x=1$, т.е. $8x=2\pi n$, $n\in Z$; $4x=\pi n$; $x=\dfrac{\pi n}{4}$.

$\max\operatorname{arcctg}(\sin 3x)=\operatorname{arcctg}(\min(\sin 3x))=\operatorname{arcctg}(-1)=\dfrac{3\pi}{4}$, достигается это значение при условии $\sin 3x=-1$, т.е. $3x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3}$.

Проверим, могут ли оба слагаемых одновременно принимать наибольшие значения. Для этого рассмотрим уравнение в целых числах:

$$12x=3\pi n=4\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad 3\pi n=-2\pi+8\pi k,\quad 3n=-2+8k.$$

1-й с п о с о б.

Возможны три различных остатка при делении k на 3.

$k=3h,\ h\in Z,$	$k=3h+1,$	$k=3h-1,$
$3n=-2+24h,$	$3n=-2+24h+8,$	$3n=-2+24h-8,$
$3(n-8h)=-2;$	$3n=6+24h,$	$3(n-8h)=-10.$
$\varnothing$	$n=2+8h;$	$\varnothing$

$x=\dfrac{\pi n}{4}=\dfrac{\pi(2+8h)}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi h.$ $\max f(x)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\pi(4+9)}{12}=\dfrac{13\pi}{12}$.

О т в е т : $\max f(x)=\dfrac{13\pi}{12}$; $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi h,\ h\in Z$.

2-й с п о с о б.

$3n=-8+3\cdot 2+8k$; $3(n-2)=8(k-1)$; $n-2=8m$, $m\in Z$; $n=2+8m$.

Примеры

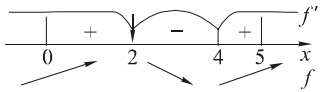
Найти наибольшее и наименьшее значения функции f ***на промежутке*** X:

1. $f(x)=x+\dfrac{4}{(x-2)^2}$, $X_1=[0;5]\setminus\{2\}$, $X_2=D_f$.

□ $f(x)=x+\dfrac{4}{(x-2)^2}$; $D_f=R\setminus\{2\}$; $f'(x)=1-\dfrac{8}{(x-2)^3}$; $D_{f'}=D_f$.

Критические точки:

$f'(x)=1-\dfrac{8}{(x-2)^3}=\dfrac{(x-2)^3-8}{(x-2)^3}=0$;



$x-2=2$; $x=4$.

По достаточному условию монотонности f возрастает на $(-\infty;2)$; $[4;\infty)$, убывает на $(2;4]$.

Точка разрыва функции – $x=2$. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)=+\infty$. Тогда наибольшего значения у функции нет ни на первом, ни на втором промежутке.

Теперь о наименьшем значении. Сначала ответим на первый вопрос задачи о множестве $X_1=[0;5]\setminus\{2\}$.

Чтобы найти наименьшее значение f на X_1, нужно сравнить $f(0)$ и $f(4)$.

$f(0)=1$; $f(4)=5$. $1<5$.

Множество X_2 – объединение открытых промежутков. Для определения наименьшего значения функции (и его наличия) нужно знать поведение функции на бесконечности (в данном случае, только на минус-бесконечности – из-за характера монотонности функции). Есть ли на минус-бесконечности предел? Если да, то он больше или меньше значения в точке минимума – точке $x=4$?

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{4}{(x-2)^2}\right)=-\infty.$$

Ответ: на X_1 наибольшего значения нет, $\min\limits_{X_1} f(x)=1$.

На X_2 функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Совет: для наглядности постройте способом сложения график функции f, тем более, что точку экстремума вы уже знаете!

2. $f(x)=3\sqrt{3}\sin x\sin 2x$, $X_1=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $X_2=R$.

□ Решим это задание двумя способами.

1-й способ («честный» и очень трудоемкий: как написано, так и делаем).

$f'(x)=3\sqrt{3}(\cos x\sin 2x+2\sin x\cos 2x)=3\sqrt{3}\sin x\left(2\cos^2 x+2\cos 2x\right)=$

$=6\sqrt{3}\sin x\left(\cos^2 x+2\cos^2 x-1\right)=6\sqrt{3}\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)$.

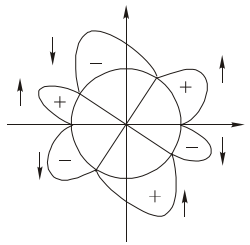
Найдем критические точки. Число 2π является периодом функции f, так что можем применять круговой метод интервалов для определения знаков производной.

$\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)=0$; $\sin x=0$, $3\cos^2 x=1$,

$f'(x)=0$: $x=\pi k$, $k\in Z$,

$3\cos 2x+3=2$, $\cos 2x=-\dfrac{1}{3}$,

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\pi n, \\ x=-\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\pi m \end{cases} \quad n,\ m\in Z.$$



Замечание. Если сложно найти какую-либо конкретную точку из промежутка (удобно, например, подставлять числа $\pm\pi/2, \pm\pi/4$), то можно («для себя») при расстановке знаков оперировать величинами «чуть меньше π», «1-я четверть, почти 0» и т.д., а можно (если вы в себе уверены!) отслеживать перемены знака при переходе через отмеченные точки.

$$f'(x)=6\sqrt{3}\sin x\left(3\cos^2 x-1\right).$$

На этот раз начнем со второй части – $X_2=R$. Чтобы найти наибольшее значение f на R, нужно сравнить значения функции в точках максимума, т.е. числа $f\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, $f(\pi)$ и $f\left(-\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, а для определения наименьшего значения функции f на R – сравнить значения в остальных точках экстремума, которые являются точками минимума.

Чтобы найти наибольшее значение f на $X_1=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, нужно сравнить значения функции в точках максимума на $X_1=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, т.е. числа $f\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$, а для определения наименьшего значения функции f на $X_1=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ – сравнить значения в остальных точках экстремума, которые являются точками минимума, и в концах отрезка.

Как вы видите, этот способ решения идейно прост, но технически очень неудобен. Его плюс – большая универсальность по сравнению со вторым способом, к которому мы сейчас и перейдем, не завершая громоздких вычислений.

2-й способ («для разумно ленивых и внимательных»: замена переменной).

$$f(x)=3\sqrt{3}\sin x\sin 2x=6\sqrt{3}\sin^2 x\cos x=6\sqrt{3}\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=$$

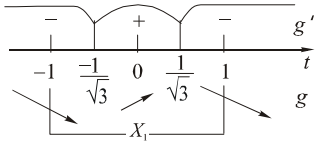
$$=6\sqrt{3}\left(-\cos^3 x+\cos x\right).$$

Пусть $\cos x=t\in[-1;1]$. Тогда

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=6\sqrt{3}\max_{[0;1]}\left(-t^3+t\right);\qquad \min_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=6\sqrt{3}\min_{[0;1]}\left(-t^3+t\right);$$

$$\max f(x)=6\sqrt{3}\max_{[-1;1]}\left(-t^3+t\right);\qquad \max f(x)=6\sqrt{3}\max_{[-1;1]}\left(-t^3+t\right).$$

$g(t)=t-t^3$; $\quad g'(t)=1-3t^2$.



Критические точки: $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$g(-1)=0$; $\quad g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$;

$g(0)=0$; $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$; $g(1)=0$.

$$\max_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f=6\sqrt{3}\max_{[0;1]}\left(-t^3+t\right)=6\sqrt{3}\frac{2}{3\sqrt{3}}=4;\quad \min_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f=6\sqrt{3}\min_{[0;1]}\left(-t^3+t\right)=0.$$

$$\max f=6\sqrt{3}\max_{[-1;1]}\left(-t^3+t\right)=6\sqrt{3}\frac{2}{3\sqrt{3}}=4;$$

$$\min f=6\sqrt{3}\min_{[-1;1]}\left(-t^3+t\right)=6\sqrt{3}\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)=-4.$$

Ответ: $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f=4;\ \min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f=0;\quad \max f=4;\min f=-4.$

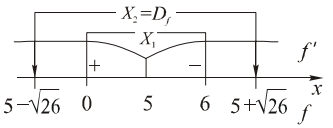
3. (*в*) $f(x)=\ln\left(-x^2+10x+1\right)$, $X_1=[0;6]$, $X_2=D_f$.

□ D_f: $x^2-10x-1<0$; $\quad (x-5)^2<26$; $\quad |x-5|<\sqrt{26}$; $\quad x\in\left(5-\sqrt{26};\ 5+\sqrt{26}\right)$.

$$f'(x)=\frac{1}{-x^2+10x+1}(-2x+10);\quad D_{f'}=D_f.$$

Критические точки: $f'(x)=0$; $\quad x=5\in\left(5-\sqrt{26};5+\sqrt{26}\right)$.

Точка $x=5$ – единственная точка экстремума как на отрезке $[0;6]$, так и на всей области определения функции f, причем это точка максимума. Тогда при $x=5$ достигается наибольшее значение функции f, а значит, и наибольшее значение f на любом множестве, содержащем число 5.



$$\max_{[0;6]} f(x)=f(5)=\ln\left(-5^2+10\cdot 5+1\right)=\ln 26.$$

Для нахождения наименьшего значения функции f на отрезке $[0;6]$ нужно сравнить значения в концах отрезка и выбрать наименьшее: $f(0)=\ln 1=0$;

$$f(6)=\ln\left(-6^2+10\cdot 6+1\right)=\ln 25>0.\qquad \min_{[0;6]} f(x)=f(0)=0.$$

Если же речь идет об открытом промежутке, каким является интервал $\left(5-\sqrt{26};5+\sqrt{26}\right)$ – область определения функции, то наименьшего значения функция здесь не имеет. Действительно, на $\left(5-\sqrt{26};5\right]$ функция возрастает, таким образом, для любого аргумента $x_1\in\left(5-\sqrt{26};5\right]$ найдется такой аргумент $x_2\in\left(5-\sqrt{26};x_1\right)$, что $f(x_2)<f(x_1)$.

Аналогично можно рассуждать и для промежутка убывания $\left[5;5+\sqrt{26}\right)$.

Ответ: $\max\limits_{[0;6]} f(x)=\ln 26$; $\ \min\limits_{[0;6]} f(x)=0$. $\ \max f(x)=\ln 26$;

наименьшего значения f не имеет.

Замечание. Можно обосновать отсутствие наименьшего значения функции, вычислив пределы (или хотя бы один из них): $\lim\limits_{x\to 5\pm\sqrt{26}} f(x)=-\infty$.

$$a^2=12;\ \ |a|=2\sqrt{3};\ \ \begin{cases} a=\pm 2\sqrt{3} \\ a\in(-4;0); \end{cases}\quad a=-2\sqrt{3}.$$

Найти множество значений функций:

4. $y=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x$.

□ Решим задачу разными способами.

1-й способ (самый технически сложный и некрасивый – для тех, кто не хочет задуматься, но, тем не менее, достаточно грамотен, чтобы справиться с заданием).

Очевидно, что данная периодическая функция ограничена и непрерывна. Следовательно, множество ее значений – отрезок между наименьшим и наибольшим значениями, которые достигаются в точках экстремума. Так как функция дифференцируема, то точки экстремума являются критическими.

$$f(x)=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x;$$

$$f'(x)=6\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\sin^2 x-2\cos x\sin x=$$

$$=4\cos^2 x+4\sin x\cos x-4\sin^2 x=4\left(\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin^2 x\right).$$

Критические точки: $\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin^2 x=0$.

Решаем уравнение, например, как однородное: $\sin x=0$ не содержит решений уравнения; делим обе части на $\sin^2 x$:

$$\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}x-1=0;\quad \operatorname{ctg}x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Вычислим значения функции при найденных значениях котангенса и выберем наибольшее и наименьшее.

$$f(x)=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=\sin^2 x\left(3+4\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\left(3+4\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x\right).$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}:\ f(x)=\frac{3-2-2\sqrt{5}+\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^2/4\right)}{1+\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^2/4\right)}=$$

$$=\frac{10-6\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}=\frac{5-3\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1}=2-\sqrt{5}.$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}:\ f(x)=\frac{3-2+2\sqrt{5}+\left(\left(1-\sqrt{5}\right)^2/4\right)}{1+\left(\left(1-\sqrt{5}\right)^2/4\right)}=$$

$$=\frac{10+6\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1}=2+\sqrt{5}.$$

Ответ: $E_f=\left[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right]$.

2-й с п о с о б (почти то же самое, но мы изначально видим замену переменной и уходим от тригонометрии к исследованию **рациональной** функции).

$$f(x)=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=$$

$$=\begin{cases}3, & \text{если}\ \ \cos x=0;\\ \dfrac{3\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}^2 x+1}, & \text{если}\ \ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

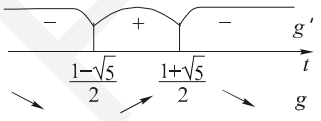
Пусть $\operatorname{tg}x=t$. Найдем множество значений функции

$$g(t)=\frac{3t^2+4t+1}{t^2+1}.\quad \left(E_f=E_g\cup\{3\}\right).$$

$$g'(t)=\frac{(6t+4)\left(t^2+1\right)-2t\left(3t^2+4t+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{6t^3+4t^2+6t+4-6t^3-8t^2-2t}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{-4t^2+4t+4}{\left(t^2+1\right)^2}=-4\frac{t^2-t-1}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

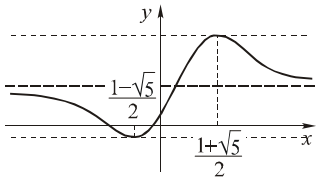
Критические точки:



$$t^2-t-1=0:\quad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$g\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=2\pm\sqrt{5}.$$

(!) Конечно же, для определения множества значений функции недостаточно знать ее точки экстремума и значения в них: нужно знать поведение функции на бесконечности (вообще, на границах области определения). Придется вычислить пределы:



$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2+4t+1}{t^2+1}=3.$$

Для большей наглядности изобразим график функции $g(t)$:

В ы в о д ы: $E_f=E_g\cup\{3\}=\left[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right]$.

Ответ: $E_f=\left[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right]$.

3-й с п о с о б (самый красивый, «детский», не использующий вообще методов математического анализа. Чистая тригонометрия – введение вспомогательного аргумента).

Заметим, что данное выражение – однородное относительно синуса и косинуса, причем 2-го порядка!

$$f(x)=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=$$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2\sin^2 x+2\cdot 2\sin x\cos x=1+1-\cos 2x+2\sin 2x=$$

$$=2-\cos 2x+2\sin 2x=2-\sqrt{1^2+2^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x\right)=2-\sqrt{5}\cos\left(2x+\varphi\right),$$

где $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}2$.

$$\cos(2x+\varphi)\in[-1;1]; \quad -\sqrt{5}\cos(2x+\varphi)\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right];$$

$$2-\sqrt{5}\cos(2x+\varphi)\in\left[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right].$$

Ответ: $E_f=\left[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right]$.

5. $y=\sin x\cos 2x$.

□ Повторим.

1-й способ (сразу дифференцируем).

$$f(x)=\sin x\cos 2x;$$

$$f'(x)=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x-4\sin^2 x\cos x=$$

$$=\cos x\left(\cos 2x-4\sin^2 x\right)=\cos x\left(\cos 2x-2\left(1-\cos 2x\right)\right)=\cos x\left(3\cos 2x-2\right);$$

или $$f'(x)=\cos x\left(\cos 2x-4\sin^2 x\right)=\cos x\left(1-6\sin^2 x\right);$$

или $$f'(x)=\cos x\left(\cos 2x-4\sin^2 x\right)=\cos x\left(2\cos^2 x-1-4+4\cos^2 x\right)=$$

$$=\cos x\left(6\cos^2 x-5\right).$$

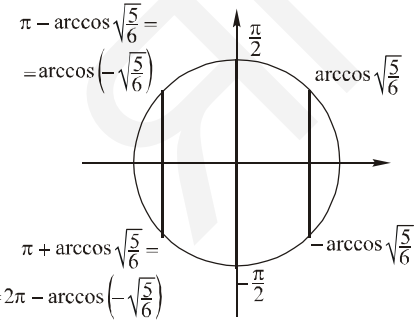
Критические точки легко найти из любого уравнения, но в последнем все выражено через одну и ту же тригонометрическую функцию – $\cos x$, а значит, легко рисовать картинку со знаками производной. Число 2π является периодом данной в условии функции (и ее производной), т.е. можно расставлять знаки на круге.

Конечно, для нахождения множества значений функции не обязательно выяснять, какие из критических точек являются точками минимума, а какие – точками максимума, так как можно сравнить значения во всех критических точках и выбрать наибольшее и наименьшее. Но если бы попросили найти только наибольшее или только наименьшее значение, то круг со знаками производной потребовался бы. Мы «переработаем» – отметим точки – только для красоты, чтобы решение выглядело более аккуратно.

Дополнительное соображение: исходная функция нечетная (проверьте!), тогда значения в точках на круге, симметричных относительно горизонтальной оси, противоположные.

Критические точки:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\sqrt{\dfrac{5}{6}},\\ \cos x=-\sqrt{\dfrac{5}{6}}.\end{array}\right.$$



$$f\left(\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=\sin\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}\cos 2\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}=\sqrt{1-\frac{5}{6}}\left(2\frac{5}{6}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};$$

$$f\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\right)=\sin\arccos\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\cos 2\arccos\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=$$

$$=\sqrt{1-\frac{5}{6}}\left(2\frac{5}{6}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};$$

$$f\left(-\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi=-1; \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

$$\min f(x)=-1; \quad \max f(x)=1.$$

Ответ: $E_f=[-1;1]$.

Используем замену переменной.

С нашей точки зрения, этот путь гораздо лучше – он проще технически, выгоднее, требует меньших затрат сил и времени.

$$f(x)=\sin x\cos 2x=\sin x\left(1-2\sin^2 x\right); \quad t=\sin x,\ t\in[-1;1];$$

$$g(t)=t\left(1-2t^2\right). \quad E_f=E_g.$$

$$g(t)=t\left(1-2t^2\right)=t-2t^3;\ g'(t)=1-6t^2.$$

Критические точки: $t=\pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}\in[-1;1]$.

$$g\left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\left(1-\frac{2}{6}\right)=\pm\frac{2}{3\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \quad g(1)=-1; \quad g(-1)=1.$$

$$\min f(x)=\min_{[-1;1]}g(t)=-1; \quad \max f(x)=\max_{[-1;1]}g(t)=1.$$

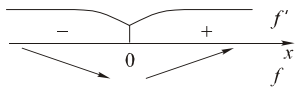
Ответ: $E_f=[-1;1]$.

6. (*в*) $y=6x+e^{-6x}$.

□ $f(x)=6x+e^{-6x}$; D_f=R; $f'(x)=6-6e^{-6x}=6\left(1-e^{-6x}\right)$.

Критические точки:

$e^{-6x}=1;\ x=0.$



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(6x+e^{-6x})=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(6x+e^{-6x})=+\infty.$$

$$f(0)=0+e^0=1.$$

(В первом случае складываются две бесконечности с разными знаками, но экспонента растет быстрее линейной функции; во втором случае линейная функция – бесконечно большая, экспонента – бесконечно малая). Заметим, что для нахождения множества значений данной функции достаточно знать монотонность, значение в точке минимума, непрерывность и только один из пределов (так как он бесконечен).

Ответ: $E_f = [1;\infty)$.

Приложение производной к решению задач геометрического и другого содержания

Общий метод – стандартный: выбираем одну из величин в качестве переменной, определяем пределы ее изменения, выражаем интересующую величину через введенную переменную и минимизируем (максимизируем) с использованием производной.

Обратим внимание на некоторые моменты, полезные для решения задач.

1. В задачах на наибольшее или наименьшее значение геометрического содержания иногда можно избежать введения производной, применив геометрические соображения (например, используя расстояние между скрещивающимися прямыми или сделав развертку многогранника).

2. Удачное введение переменной при решении задачи методами математического анализа может сильно сократить решение. Можно вводить в качестве переменной длины, углы, а иногда значительно удобнее брать, например, отношение длин, фиксирующее расположение «бегающей по ребру» точки.

3. Если проще воспользоваться алгоритмом нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на отрезке, но по условию геометрической задачи возникает интервал, можно доопределить функцию в концах промежутка, включив в рассмотрение «вырожденные» фигуры, например, треугольник со стороной, равной 0 (одна сторона стянулась в точку, получился отрезок). При этом необходимо в решении упомянуть, что функцию доопределили в граничных точках по непрерывности. Введение таких предельных случаев может упростить обоснование решения.

4. При решении задач геометрического содержания (и не только) часто возникают функции типа $S(x) = \sqrt{f(x)}$. Тогда можно:

а) находить промежутки знакопостоянства функции типа $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$;

б) ввести для задач этого типа следующее правило: критические точки $S(x)$ совпадают с критическими точками $f(x)$ (правда, при написании, например, экзаменационной работы, это потребует дополнительных обоснований);

в) рассматривать не $S(x)$, а $S^2(x)$, так как $S(x) > 0$, и функции $S(x)$ и $S^2(x)$ принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке;

г) иногда удобно сделать замену типа $t = x^2$ и т.д. и рассматривать $S\big(t(x)\big)$, $t \in T$;

д) заметим, что при расстановке знаков производной можно подставлять и границы промежутка, если они не являются критическими точками функции, а получились из условия задачи;

е) важно правильно определить промежуток изменения переменной (часто бывают ошибки), хотя иногда ограничения и можно получить чисто алгебраически – они совпадают с областью существования формулы, задающей функцию;

ж) если условие задачи дано в буквенном виде, то при определении знаков производной числа не подставишь, нужно брать величины, включающие буквенные данные, что часто представляет определенные сложности для учащихся.

5. Условия

(1) $\max\{a;b\} > c \ \ (\geq c)$; (3) $\max\{a;b\} < c \ \ (\leq c)$;

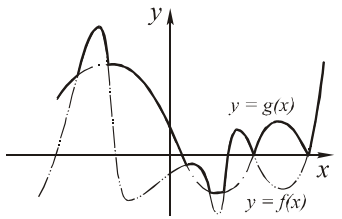
(2) $\min\{a;b\} > c \ \ (\geq c)$; (4) $\min\{a;b\} < c \ \ (\leq c)$

можно записать по-другому:

$$(1)'\ \begin{bmatrix} a > c \\ b > c \end{bmatrix} \ (\geq c); \quad (3)'\ \begin{cases} a < c \\ b < c \end{cases} \ (\leq c);$$

$$(2)'\ \begin{cases} a > c \\ b > c \end{cases} \ (\geq c); \quad (4)'\ \begin{bmatrix} a < c \\ b < c \end{bmatrix} \ (\leq c).$$

Это может пригодиться, если по каким-то причинам неудобно сравнивать a и b, являющиеся, например, функциями от x.



6. Если задачу удобно решать графически, то просто построить график вида, например, $y = \max\{f(x), g(x)\}$ (обведено на чертеже).

7. Иногда удобно заменить неравенство $\max\limits_X f(x) \underset{(\leq)}{<} a$ на неравенство $f(x) \underset{(\leq)}{<} a, x \in X$, или неравенство $\min\limits_X f(x) \underset{(\geq)}{>} a$ на неравенство $f(x) \underset{(\geq)}{>} a, \ x \in X$.

8. Понятия наибольшего и наименьшего значений функции (на промежутке) тесно связаны с понятием множества значений функции (на промежутке).

Замечание. Далее мы будем решать задачи на наибольшее и наименьшее значения, в том числе и те задачи, в которых не требуется применять производную.

П р и м е р ы

7. ***На графике*** $y = x^2 - 2x$ ***найти точку, расстояние от которой до точки*** $M\left(5;\frac{5}{2}\right)$ ***будет минимальным. Найти это расстояние.***

□ Задачу можно решать по-разному. Можно написать формулу расстояния между точками $M\left(5;\frac{5}{2}\right)$ и $N\left(x;x^2-2x\right)$ и затем минимизировать полученную функцию (1-й способ), а можно вспомнить геометрический смысл производной и сделать следующий вывод: ближайшей к точке *M* является одна из тех точек графика, нормаль в которых проходит через точку *M* (2-й способ).

1-й с п о с о б.

$\rho(M;N) = \sqrt{(x-5)^2 + \left(x^2-2x-\frac{5}{2}\right)^2}$. Если мы не хотим брать производную от функции, содержащей иррациональности, то рассмотрим квадрат расстояния (он минимален в точности тогда, когда расстояние минимально):

$$\rho^2(x) = (x-5)^2 + \left(x^2-2x-\frac{5}{2}\right)^2;$$

$$\left(\rho^2\right)' = 2(x-5) + 2\left(x^2-2x-\frac{5}{2}\right)(2x-2) =$$

$$= 2x-10+2(x-1)\left(2x^2-4x-5\right) = 4x^3-12x^2.$$

Заметим, что было бы потрачено больше времени, если бы мы раскрыли квадраты до взятия производной.

Критические точки:

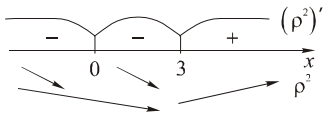
$4x^3-12x^2=0$; $4x^2(x-3)=0$; $x=0$; $x=3$.

Найдем промежутки знакопостоянства производной.

Теперь нужно предъявить разумное и грамотное обоснование того, что наименьшее значение функция ρ^2 принимает именно в точке 3.

Один из возможных вариантов: $x=0$ – точка непрерывности функции ρ^2; функция на $(-\infty;3]$ убывает, на $[3;\infty)$ возрастает. Тогда $\min\rho^2 = \rho^2(3)$.

Другой вариант: $x=3$ – единственная точка экстремума функции ρ^2 на *R*, которая при этом является точкой минимума. Тогда $\min\rho^2 = \rho^2(3)$.



$$\min\rho = \rho(3) = \sqrt{(3-5)^2 + \left(3^2-2\cdot3-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$y(3) = y = 3^2-2\cdot3 = 3.$$

Ответ: точка $(3;3)$; расстояние $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

2-й с п о с о б.

Напишем уравнение нормали к функции $y = x^2-2x$ в произвольной точке *a*:

$$f(x) = x^2-2x; \quad f'(x) = 2x-2; \quad \frac{y-f(a)}{x-a} = -\frac{1}{f'(a)};$$

$$\frac{y-a^2+2a}{x-a} = -\frac{1}{2a-2}.$$

Условие принадлежности нормали точки $\left(5;\frac{5}{2}\right)$:

$$\frac{\frac{5}{2}-a^2+2a}{5-a} = -\frac{1}{2a-2},$$

$$(a-1)\left(5-2a^2+4a\right)+5-a=0,$$

$$5a-2a^3+4a^2-5+2a^2-4a+5-a=0,\ -2a^3+6a^2=0,$$

$$2a^2(-a+3)=0, \quad a_1=0,\ a_2=3.$$

$f(3) = 3^2-2\cdot3 = 3$; $f(0)=0$.

Выбираем из точек $(3;3);(0;0)$.

$$\rho\left((3;3);\left(5;\frac{5}{2}\right)\right) = \sqrt{(3-5)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2};$$

$$\rho\left((0;0);\left(5;\frac{5}{2}\right)\right) = \sqrt{(0-5)^2+\left(0-\frac{5}{2}\right)^2} > 5.$$

Точка $(3;3)$ ближе к точке *M*, чем точка $(0;0)$.

Ответ: точка $(3;3)$; расстояние $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

ЯГУБОВ.РФ

8. ***Функция*** $y=\dfrac{1}{x^2-4x+a}$ ***определена на отрезке*** $[5;7]$***. Найти*** y' ***и все значения*** $a\in R$***, при которых наибольшее значение функции*** $y(x)$ ***на отрезке*** $[5;7]$ ***не превышает*** $0{,}1$.

☐ Отвечаем на первый вопрос:

$$y'=-\frac{1}{\left(x^2-4x+a\right)^2}(2x-4).$$

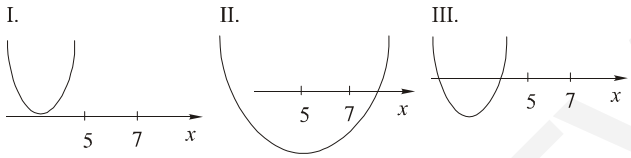
Производная только помогла определить абсциссу вершины параболы $g(x)=x^2-4x+a$.

Попробуем ответить на второй вопрос задачи.

Что подразумевал составитель задачи: отрезок $[5;7]$ входит полностью в область определения функции или функция рассматривается только на отрезке $[5;7]$?

На всякий случай подстрахуемся и учтем более сложный вариант: сначала отметим, что о наибольшем значении не может быть и речи, если где-то на указанном отрезке знаменатель функции обращается в 0 (тогда при подходе к корню знаменателя функция становится бесконечно большой, что не удовлетворяет поставленному условию). Исключим эту ситуацию (заметим, что абсцисса вершины параболы $g(x)=x^2-4x+a$ $x=2$, т.е. весь отрезок $[5;7]$ соответствует правой, возрастающей ветви параболы):

Наибольшее значение $g(x)$ достигается в правом конце отрезка $[5;7]$, наименьшее – в левом.

I. 

Условие на тип параболы: $D<0$.

$\forall x\in[5;7]\quad g(x)>0.$

$$\max_{[5;7]} f(x)=\max_{[5;7]}\frac{1}{x^2-4x+a}=\frac{1}{\min\limits_{[5;7]}\left(g(x)\right)}=\frac{1}{g(5)}=\frac{1}{25-20+a}=\frac{1}{5+a}.$$

Итого: $\begin{cases}\dfrac{1}{5+a}\le 0{,}1,\\ D<0.\end{cases}$

II: Условие на тип параболы:

$$\begin{cases}g(5)<0\\ g(7)<0\end{cases};\quad\begin{cases}25-20+a<0\\ 49-28+a<0\end{cases};\quad\begin{cases}a<-5\\ a<-21\end{cases};\quad a<-21.$$

Замечание. Зная, где расположена вершина – левее данного отрезка – можно было ставить условие только на знак функции g в правом конце отрезка.

$\max\limits_{[5;7]} f(x)<0\le 0{,}1$.

III: Условие на тип параболы (где вершина, мы уже знаем и учитываем):

$\begin{cases}g(5)>0\\ D\ge 0.\end{cases}$

Заметим, что случаи I и III очень похожи: для решения нашей задачи здесь не важно, есть корни у квадратичной функции или же их нет. Можно обойтись одним условием на тип параболы: $g(5)>0$. Тогда для случаев I и III получаем систему: $\begin{cases}g(5)>0\\ \dfrac{1}{g(5)}\le 0{,}1.\end{cases}$

Суммируя полученные условия, пишем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(5)>0\\ \dfrac{1}{g(5)}\le 0{,}1;\\ a<-21\end{cases}\\ \begin{cases}g(5)>0\\ g(5)\ge 10;\\ a<-21\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}a+5\ge 10\\ a<-21\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}a\ge 5\\ a<-21\end{array}\right.$$

Ответ: $y'=\dfrac{4-2x}{\left(x^2-4x+a\right)^2}$; наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[5;7]$ не превышает 0,1 при $a\in(-\infty;-21)\cup[5;\infty)$.

Другой подход к той же задаче (см. текст перед примерами).

Наибольшее значение не больше 0,1 *в точности тогда, когда ВСЕ значения* (*на отрезке*) *не больше* 0,1.

Требуется узнать, при каких значениях a $\dfrac{1}{x^2-4x+a}\le 0{,}1\ \ \forall x\in[5;7]$.

$$\frac{1}{x^2-4x+a}\le 0{,}1;\quad\frac{10-x^2+4x-a}{10(x^2-4x+a)}\le 0;\quad\frac{x^2-4x+a-10}{x^2-4x+a}\ge 0;$$

$$\frac{(x-2)^2-(14-a)}{(x-2)^2-(4-a)}\ge 0;\quad t=(x-2)^2\in\left((5-2)^2;(7-2)^2\right)=(9;25).$$

Ягубов.рф

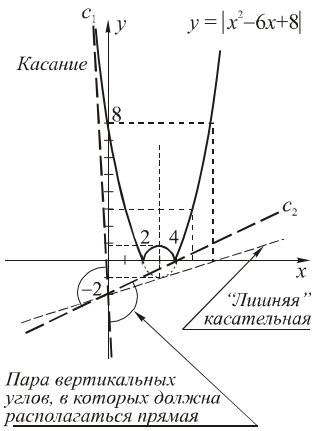
$$\forall t\in(9;25)\quad \left[\begin{cases} t-(14-a)\ge 0\\ t-(4-a)>0\end{cases}\right.;\quad \left[\begin{cases} 14-a\le t\\ 4-a<t\end{cases}\right.;\quad \left[\begin{cases} 14-a\le t\\ 4-a>t\end{cases}\right.;\quad \left[\begin{cases} a\ge 14-t\\ a<4-t\end{cases}\right.;$$

$$\left[\begin{cases} a\ge 14-9\\ a<4-25\end{cases}\right.;\quad \left[\begin{cases} a\ge 5\\ a<-21.\end{cases}\right.$$

Ответ: $y'=\dfrac{4-2x}{\left(x^2-4x+a\right)^2}$; наибольшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[5;7]$ не превышает 0,1 при $a\in(-\infty;-21)\cup[5;\infty)$.

9. ***При каких значениях*** c $\max\left(cx-\left|x^2-6x+8\right|\right)<2$?

□ Опять демонстрируем владение тем же методом, что и в предыдущей задаче: переходим от неравенства на наибольшее значение (благо, оно в нужную сторону) к общему неравенству. Так как наибольшее значение функцией $f(x)=cx-\left|x^2-6x+8\right|$ достигается (f непрерывна на R, а также $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$), то корректно будет дать следующее утверждение:



$$(\max\left(cx-\left|x^2-6x+8\right|\right)<2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\forall x\in R\quad \left(cx-\left|x^2-6x+8\right|<2\right)\right).$$

Рассмотрим последнее неравенство.

$$\left|x^2-6x+8\right|>cx-2.$$

Выгоднее всего изобразить графически левую и правую части неравенства.

1. $y=\left|x^2-6x+8\right|$ получается из параболы $y=x^2-6x+8$ отражением графика из нижней полуплоскости в верхнюю.

2. $y=cx-2$ – семейство наклонных прямых, проходящих через точку $(0;-2)$, угловой коэффициент которых c меняется в зависимости от значения параметра. Вопрос: при каких угловых коэффициентах c прямые указанного семейства расположены целиком ниже графика $y=\left|x^2-6x+8\right|$?

Делаем рисунок (c_1 и c_2 – угловые коэффициенты важных граничных положений прямой $y=cx-2$).

Осталось найти c_1 и c_2.

c_1: Прямая $y=cx-2$ является касательной к параболе $y=x^2-6x+8$.

1-й с п о с о б.

Уравнение касательной с неизвестной абсциссой a точки касания:

$$y=x^2-6x+8;\quad y'=2x-6:$$

$$y_{\text{кас}}=a^2-6a+8+(2a-6)(x-a);\quad y_{\text{кас}}=(2a-6)x-a^2+8.$$

Прямые $y=(2a-6)x-a^2+8$ и $y=cx-2$ совпадают, т.е. равны соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} c=2a-6\\ a^2-8=2\end{cases},\qquad \begin{cases} c=2a-6\\ a=\pm\sqrt{10}\end{cases}\qquad c=\pm2\sqrt{10}-6.$$

Мы получили два значения c. Какое же из них c_1? Обратимся еще раз к чертежу. Дело в том, что через точку $(0;-2)$ действительно можно провести к указанной параболе две различные касательные. Искомая касательная – та, у которой угловой коэффициент меньше (вообще, он отрицателен, а у «лишней» касательной – положителен). Тогда $c_1=-2\sqrt{10}-6$.

2-й с п о с о б.

Касательная к параболе – это прямая, не параллельная оси параболы, имеющая с параболой единственную общую точку. Запишем условие единственности решения квадратного уравнения $x^2-6x-8=cx-2$.

$$x^2-(6+c)x+10=0;\quad D=(6+c)^2-40=0;$$

$$(6+c)^2=40;\quad |6+c|=2\sqrt{10};\quad c=-6\pm2\sqrt{10}.$$

Далее рассуждения с отбором нужного корня повторяются.

c_2: точка $(4;0)$ лежит на прямой $y=cx-2$. $0=c\cdot4-2$ $c=1/2$. $c_2=1/2$.

Ответ: $c\in\left(-6-2\sqrt{10};\ 1/2\right)$.

10. ***Вписать в окружность радиуса*** R ***равнобедренный треугольник наибольшей возможной площади.***

□ Мы попали в серию стандартных задач на наибольшие и наименьшие значения. Наши действия:

1) вводим одну или несколько переменных;

2) записываем связи между этими переменными, пользуясь данными условия задачи;

3) оставляем одну переменную;

4) записываем область ее изменения;

5) выражаем через выбранную переменную ту величину, которую нужно сделать наибольшей или наименьшей. Получаем функцию одной переменной;

6) берем производную;

7) находим на указанном множестве (области изменения переменной) наибольшее или наименьшее значения функции;

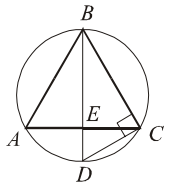
8) четко обосновываем («для комиссии») свои выводы;

9) еще раз читаем условие задачи и пишем ответ.

Всё!

Решаем предложенную задачу двумя способами (с различным выбором переменной). В дальнейшем, конечно, два способа выписывать не надо, читатель волен использовать наиболее близкий ему лично способ.

1-й с п о с о б.



Пусть длина основания треугольника $AC = 2a$, длина высоты $BE = h$.

Продлим высоту BE за точку E до «южного полюса» – точки D. Тогда треугольник BCD – прямоугольный, его высота $CE = a$.

Из ΔBCD:

$CE^2 = BE \cdot DE; \quad a^2 = h(2R - h)$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = ah$; так как выражать как a, так и h неудобно, то воспользуемся «маленькой хитростью»: будем делать наибольшей не площадь, а ее квадрат.

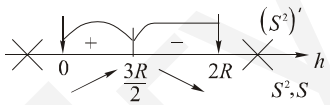
$$S^2 = a^2 h^2 = h^3 (2R - h).$$

Видим, что осталась переменная h – высота треугольника. Так как треугольник должен влезть в окружность, то $h \in (0; 2R)$ (то же условие можно получить, исходя из положительности квадрата площади).

$$S^2(h) = h^3(2R - h); \quad \left(S^2\right)'(h) = 6Rh^2 - 4h^3 = 2h^2(3R - 2h).$$

Критические точки:

$h = 0 \notin (0; 2R); \; h = 3R/2$.



Если бы в выражении для функции участвовали только числа, то для определения знака достаточно было бы подставить в производную число из каждого промежутка. Здесь же нужно подбирать значения аргумента, выраженные через R. Например: $\left(S^2\right)'(R) > 0; \quad \left(S^2\right)'(7R/4) < 0$. Кстати, число $2R$ не является корнем производной, так что можно проверять и по знаку $\left(S^2\right)'(2R)$.

Очевидно, что наибольшее значение S принимает при $h = 3R/2$

К сожалению, для комиссии на вступительных экзаменах очевидных вещей не бывает, и мы обязаны предъявить полное обоснование.

Самый простой вариант: «Функция S возрастает на $(0; 3R/2]$ и убывает на $[3R/2; 2R)$. Следовательно, наибольшее значение достигается в точке $h = 3R/2$».

Или: «$h = 3R/2$ – единственная точка экстремума функции S^2 на $(0; 2R)$, причем точка максимума. Следовательно, наибольшее значение достигается при $h = 3R/2$».

Возможен еще вариант (заметим, что он не требует картинки со знаками производной): «Доопределим функцию S^2 по непрерывности в точках 0 и $2R$ числом 0 (очевидно, это не наибольшее значение площади). Тогда для нахождения наибольшего значения функции **на отрезке** достаточно сравнить значения в критических точках и в концах отрезка.

$$S\left(\frac{3R}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^3 \left(2R - \frac{3R}{2}\right)} = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{\frac{3R}{2} \cdot \frac{R}{2}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4};$$

$$S(0) = 0; \quad S(2R) = 0.$$

Следовательно, наибольшее значение достигается при $h = 3R/2$».

Итак, пора давать ответ. В задаче требовалось вписать в окружность радиуса R равнобедренный треугольник наибольшей возможной площади, т.е. мы должны просчитать сам треугольник или же указать его вид.

$$h = \frac{3R}{2}; \quad 2a = 2\sqrt{h(2R - h)} = 2\sqrt{\frac{3R}{2} \cdot \frac{R}{2}} = R\sqrt{3}.$$

Боковая сторона

$$b = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}} = R\sqrt{3} = 2a.$$

Как и следовало ожидать, треугольник получился равносторонним!

Ответ: треугольник правильный.

2-й с п о с о б.

Пусть угол при основании треугольника равен α, $\alpha \in (0; \pi/2)$. Тогда угол при вершине $\pi - 2\alpha$, по теореме синусов длина боковой стороны равна $2R\sin\alpha$.

Вычислим площадь треугольника:

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(2R\sin\alpha)^2 \sin(\pi - 2\alpha) = 2R^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha = 4R^2 \sin^3\alpha \cos\alpha =$$

$$= 4R^2 \sin^3\alpha \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Можем повторить ту же процедуру, что и при предыдущем способе решения:

$$S^2(\alpha) = 16R^4 \sin^6\alpha \cos^2\alpha = 16R^4 \sin^6\alpha (1 - \sin^2\alpha).$$

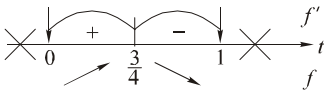
Далее выгодно провести замену переменной (так как целые рациональные функции дифференцировать проще, чем тригонометрические):

$$\sin^2\alpha = t \in (0;1); \quad f(t) = (S/4R)^2 = t^3(1-t).$$

$$f'(t) = 3t^2 - 4t^3 = t^2(3-4t).$$

Критические точки:

$t = 0 \notin (0;1)$, $t = 3/4$.



f возрастает на $(0;\ 3/4]$, убывает на $[3/4;\ 1)$. Следовательно, $\max\limits_{(0;1)} f(t) = f(3/4)$.

Тогда $\max S = S(\alpha_0)$, где $\sin^2\alpha_0 = \frac{3}{4}$, т.е. $\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_0 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: треугольник наибольшей площади – равносторонний.

3-й с п о с о б.

Предпримем те же действия, но без замены переменной.

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(2R\sin\alpha)^2 \sin(\pi - 2\alpha) = 2R^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha;$$

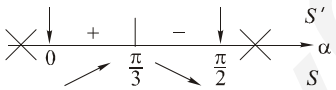
$$S'(\alpha) = 2R^2\left(\sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha 2\sin^2\alpha\right) = 2R^2(2\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha + \sin^2\alpha 2\cos 2\alpha) =$$

$$= R^2\left(1 - \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha(1 - \cos 2\alpha)\right) = R^2\left(-2\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha + 1\right) =$$

$$= R^2(1 - \cos 2\alpha)(1 + 2\cos 2\alpha).$$

По условию $\alpha \in (0;\ \pi/2)$.

Тогда $2\alpha \in (0;\pi)$.



Критические точки:

$\cos 2\alpha = 1$; $2\alpha = 0 \notin (0;\pi)$.

$1 + 2\cos 2\alpha = 0$; $\cos 2\alpha = -1/2$; $2\alpha = 2\pi/3$; $\alpha = \pi/3$.

$S'(\pi/6) > 0$; $S'(5\pi/12) < 0$.

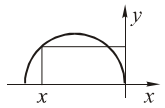
(Конечно, можно выписать эту строку только «для комиссии», а на самом деле при расстановке знаков оперировать понятиями типа «аргумент положительный, чуть больше 0»; «аргумент 1-й четверти, чуть меньше $\pi/2$, тогда удвоенный аргумент во 2-й четверти, чуть меньше π» и т.д.)

На промежутке $(0;\ \pi/2)$ $\alpha = \pi/3$ – единственная точка экстремума, причем точка максимума, следовательно, $\max\limits_{(0;\ \pi/2)} S(\alpha) = S(\pi/3)$.

Если угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/3$, то треугольник равносторонний.

Ответ: треугольник правильный.

11. ***Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции*** $y = \sqrt{-4x - x^2}$?



☐ Сделаем чертеж.

$y = \sqrt{-4x - x^2}$, $\begin{cases} y^2 + (x+2)^2 = 2^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

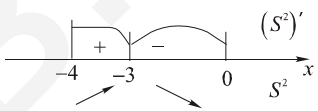
– верхняя полуокружность с центром $(-2;0)$ радиуса 2.

Логично ввести абсциссу x вершины, лежащей на графике, в качестве переменной. Тогда $x \in (-4;0)$ (можно взять $x \in [-4;0]$, если считать, что отрезок – тоже прямоугольник, но две его стороны нулевые). Выразим площадь:

$$S(x) = (-x)\cdot y(x) = -x\sqrt{-x^2 - 4x}.$$

$$S^2(x) = -x^2(x^2 + 4x) = -x^4 - 4x^3; \quad (S^2)'(x) = -4x^3 - 12x^2 = -4x^2(x+3).$$

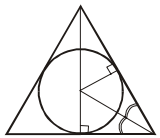
$$(S^2)' = 0: \quad x = 0,\ x = -3.$$



$x = -3$ – единственная точка экстремума на промежутке $(-4;0)$, причем точка максимума. Наибольшая площадь у прямоугольника, две вершины которого имеют абсциссу -3, $\max S = S(-3) = 3\sqrt{-9+12} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: наибольшая площадь $3\sqrt{3}$.

12. ***Описать около сферы радиуса*** r ***прямой круговой конус наименьшего объема.***



☐ Изобразим осевое сечение конуса с сечением большого круга сферы.

Пусть, например, угол наклона образующей к основанию конуса равен 2α. Тогда радиус основания конуса – $r\operatorname{ctg}\alpha$, высота конуса – $r\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha$; объем конуса

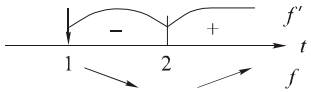
$$V = \frac{1}{3}(r\cdot\operatorname{ctg}\alpha)^2\left(r\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\right).$$

Итак: $\alpha \in (0;\ \pi/4)$,

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} = \frac{2r^3}{3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Проведем замену переменной:

$$t = \operatorname{ctg}^2\alpha \in (1;\infty); \quad f(t) = \frac{3V}{2r^3} = \frac{t^2}{t-1}.$$



$$f'(t)=\frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2};$$

единственная критическая точка на интервале $(1;\infty)$ – $t=2$.

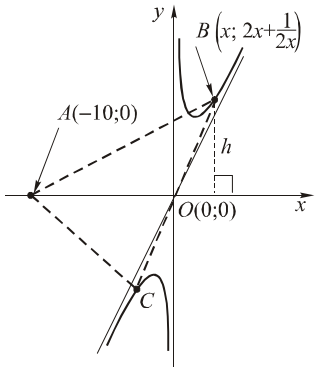
На $(1;2]$ функция $f(t)$ (а вместе с ней и объем) убывает, на $[2;\infty)$ возрастает. Наименьшее значение объема достигается при $t=\operatorname{ctg}^2\alpha=2$. Тогда $\cos 2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: наименьший объем $8r^3/3$ будет иметь конус с углом при основании $\arccos(1/3)$.

13. ***Рассматриваются все треугольники с вершиной*** $(-10;0)$***, две другие вершины каждого из которых симметричны относительно начала координат и лежат на графике*** $y=2x+\dfrac{1}{2x}$***. Найти наименьшую возможную площадь такого треугольника.***

□ Для начала нужно понять, что это за график: $y=2x+\dfrac{1}{2x}$.

Полностью исследовать его не обязательно, но сразу видно, что функция нечетная (график симметричен относительно начала координат); при положительных x функция положительна, при отрицательных – отрицательна; график обладает двумя прямолинейными асимптотами: вертикальной $x=0$ и наклонной $y=2x$. На основании этих сведений (или «честно» – сложением графиков $y=2x$ и $y=1/2x$) можно построить эскиз графика функции $y=2x+\dfrac{1}{2x}$ и проанализировать условие задачи («чего от нас хотят»).



Минимизировать нужно площадь треугольника ABC. Приведем простейшие геометрические соображения:

$$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ABO}=2\frac{1}{2}AO\cdot h=10h=10\left(2x+\frac{1}{2x}\right),$$

где $B\left(x;\,2x+\dfrac{1}{2x}\right)$, $x>0$.

Вводим в рассмотрение функцию $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$, которую и будем минимизировать на промежутке $(0;\infty)$.

Задача становится совершенно элементарной для читателей, знакомых с неравенством Коши (среднее арифметическое двух неотрицательных величин не менее их среднего геометрического) или с его следствием (сумма двух взаимно обратных положительных величин не менее 2, сумма двух взаимно обратных отрицательных величин не более -2). Напомним, что оба неравенства обращаются в равенство при условии равенства двух упомянутых в условии величин.

Итак, $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}\ge 2$; $f(x)=2$ при $2x=\dfrac{1}{2x}$, т.е. $(2x)^2=1$, $x=1/2$.

(Важно, что наименьшее значение $f(x)$ при некотором x достигается!)

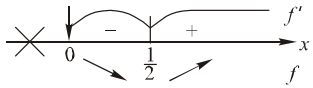
Тогда $\min S_{\Delta ABC}=10\min\limits_{(0;\infty)}\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)=10\cdot 2=20$.

Ответ: 20.

Теперь сделаем вид, что мы не знаем неравенства Коши и неравенства для суммы взаимно обратных. Имеем ли мы шанс справиться с задачей? Конечно! Ведь у нас есть такой мощный инструмент, как производная! Вперед! минимизируем $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$ на $(0;\infty)$. Кстати, по картинке видно, что функция на $(0;\infty)$ имеет единственную критическую точку, являющуюся точкой минимума, которую и нужно «отловить», и если в ней провести высоту h, то она и будет наименьшей. Здесь даже знаки производной расставлять не обязательно!

$$f'(x)=2-\frac{1}{2x^2}=\frac{4x^2-1}{2x^2};\qquad f'(x)=0:\quad 4x^2=1;\quad x=\frac{1}{2}.$$

На всякий случай («для придирчивой комиссии») найдем промежутки знакопостоянства производной:



f убывает на $\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right]$, возрастает на $\left[\dfrac{1}{2};\,\infty\right)$, т.е., как и было выяснено ранее, наименьшее значение f будет соответствовать $x=\dfrac{1}{2}$.

$$\min_{(0;\infty)} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{1}=2,$$

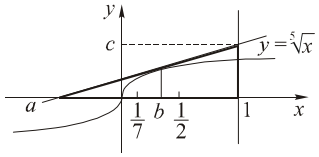
$$\min S_{\Delta ABC}=10\cdot 2=20.$$

Ответ: 20.

14. ***Касательная к графику функции $y=\sqrt[5]{x}$ такова, что абсцисса b точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{7};\frac{1}{2}\right]$. При каком значении b площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=1$, будет наименьшей? Чему равна эта наименьшая площадь?***

☐ Запишем уравнение касательной:

$$y=\sqrt[5]{x};\quad y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};$$



$$y_{\text{кас}}=\sqrt[5]{b}+\frac{1}{5\sqrt[5]{b^4}}(x-b);\quad y_{\text{кас}}=\frac{x}{5\sqrt[5]{b^4}}+\frac{4}{5}\sqrt[5]{b}\ .$$

Для вычисления площади треугольника нужно знать абсциссу a точки пересечения касательной с осью Ox и ординату c точки пересечения касательной с прямой $x=1$.

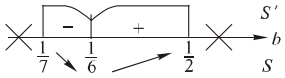
$$a:\quad \frac{a}{5\sqrt[5]{b^4}}+\frac{4}{5}\sqrt[5]{b}=0;\quad a=-4b;\qquad c:\quad c=\frac{1}{5\sqrt[5]{b^4}}+\frac{4}{5}\sqrt[5]{b}=\frac{1+4b}{5\sqrt[5]{b^4}}.$$

$$S(b)=\frac{1}{2}(1-a)c=\frac{1}{2}(1+4b)\frac{1+4b}{5\sqrt[5]{b^4}}=\frac{1}{10}\frac{(1+4b)^2}{\sqrt[5]{b^4}}.$$

$$S'(b)=\frac{1}{10}\frac{2(1+4b)4\sqrt[5]{b^4}-\frac{4}{5\sqrt[5]{b}}(1+4b)^2}{\sqrt[5]{b^8}}=$$

$$=\frac{4(1+4b)(10b-1-4b)}{50\sqrt[5]{b^9}}=\frac{4(1+4b)(6b-1)}{50b\sqrt[5]{b^4}}.$$

$b=\frac{1}{6}$ – единственная критическая точка на отрезке $\left[\frac{1}{7};\frac{1}{2}\right]$.



На $\left[\frac{1}{7};\frac{1}{6}\right]$ S убывает, на $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$ – возрастает.

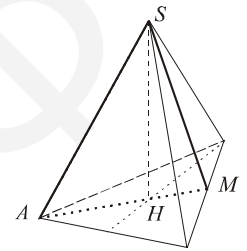
Наименьшее значение S принимает при $b=\frac{1}{6}$.

$$\min S=S\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{10}\frac{\left(1+\frac{4}{6}\right)^2}{\sqrt[5]{\frac{1}{6^4}}}=\frac{25\sqrt[5]{6^4}}{90}=\frac{5\sqrt[5]{6^4}}{18}.$$

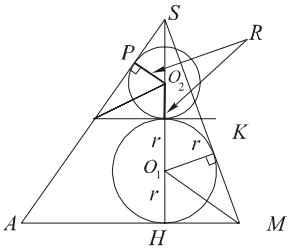
Ответ: $b_{\min}=\frac{1}{6};\quad \min S=\frac{5\sqrt[5]{6^4}}{18}$.

15. ***В правильную треугольную пирамиду вписаны два шара так, что первый касается основания пирамиды и ее боковых граней, а второй шар касается внешним образом первого шара и боковых ребер пирамиды. Радиус первого шара равен r. Найти радиус второго шара, если объем пирамиды при этих условиях является минимально возможным.***

☐ Введем какие-либо параметры пирамиды, например, ребро основания a и высоту h.



Первый шар вписан в пирамиду, второй касается ее ребер и первого шара. Радиусы обоих шаров можно вычислить через размеры пирамиды, если сделать одно и то же сечение комбинации тел: сечение, содержащее боковое ребро и апофему противолежащей грани пирамиды.



Решение задачи состоит из нескольких частей.

Сначала забудем про второй шар и выясним, при каких размерах пирамиды ее объем будет наименьшим.

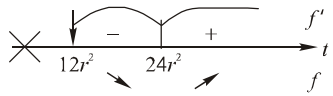
1) Свяжем a и h при помощи данного радиуса r. Рассмотрим выносной чертеж.

ΔO_1SK и ΔMSH подобны: $\frac{SO_1}{SM}=\frac{O_1K}{HM}$.

$$\frac{h-r}{\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{r}{\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)};\qquad \frac{h-r}{\sqrt{12h^2+a^2}}=\frac{r}{a};\quad a^2(h-r)^2=r^2\left(12h^2+a^2\right)$$

$$a^2h^2-2a^2hr+a^2r^2=12r^2h^2+a^2r^2;$$

$$a^2h-2a^2r=12r^2h;\qquad h=\frac{2a^2r}{a^2-12r^2}.$$



2) Минимизируем объем пирамиды.

По условию $h\in(2r;\infty)$, $a\in\left(2r\sqrt{3};\infty\right)$. Выразим объем пирамиды через переменную a.

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h=\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2a^4r}{a^2-12r^2}=\frac{r}{2\sqrt{3}}\frac{a^4}{a^2-12r^2}.$$

Пусть $t=a^2\in\left(12r^2;\infty\right)$. Рассмотрим $f(t)=\frac{2\sqrt{3}}{r}V=\frac{t^2}{t-12r^2}$.

$$f'(t)=\frac{2t\left(t-12r^2\right)-t^2}{\left(t-12r^2\right)^2}=\frac{t\left(t-24r^2\right)}{\left(t-12r^2\right)^2}.\quad f'(t)=0:\quad t=24r^2.$$

Функция f (и вместе с ней объем пирамиды) убывает на $\left(12r^2;24r^2\right]$, возрастает на $\left[24r^2;\infty\right)$. Наименьший объем при $t=24r^2$, т.е. $a^2=24r^2$, $a=2r\sqrt{6}$.

Тогда $$h=\frac{2a^2r}{a^2-12r^2}=\frac{2\cdot 24r^3}{12r^2}=4r.$$

3) Зная размеры пирамиды и данный радиус первого шара r, найдем радиус второго шара R.

Для этого опять используем аналогичное подобие треугольников O_2SP и ASH (на этот раз, в левой части выносного чертежа). С Вашего разрешения, сразу запишем отношение сторон треугольников (заметим, что на выносном чертеже касательная плоскость к первому шару, параллельная основанию пирамиды, изображена средней линией большого треугольника):

$$\frac{h-3r}{\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{R}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)};\quad \frac{h-3r}{\sqrt{3h^2+a^2}}=\frac{R}{a};\quad \frac{4r-3r}{\sqrt{48r^2+24r^2}}=\frac{R}{2r\sqrt{6}};$$

$$\frac{r}{6r\sqrt{2}}=\frac{R}{2r\sqrt{6}};\quad R=\frac{2r\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{3}}{3}=\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: радиус второго шара $\frac{r}{\sqrt{3}}$.

Глава 20. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Напомним два очень простых факта (это следствия из соответствующих определений), полезных для решения многих задач, в частности, некоторых из приведенных ниже.

Утверждение 1.

Если $f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$, то $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Если $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$, то $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Утверждение 2.

Если $\min\limits_{D_f} f(x)=A>0$ *(B),* то $f(x)>0$ (B) $\forall x\in D_f$.

Если $\max\limits_{D_f} f(x)=A<0$ *(B),* то $f(x)<0$ (B) $\forall x\in D_f$.

П р и м е р ы

1. ***Доказать, что*** $p^2+\frac{1}{p^4}<q^2+\frac{1}{q^4}$ ***, если*** $\sqrt[6]{2}<p<q$.

□ Внимательный читатель, привыкший к функциональному подходу при решении различных задач, сразу заметит, что в обеих частях неравенства стоят значения одной и той же функции $f(x)=x^2+\frac{1}{x^4}$, только в различных точках p и q. Тогда в задании просят всего лишь доказать возрастание функции f (проверьте соответствие знаков неравенств между аргументами и значениями функции!) на промежутке $\left(\sqrt[6]{2};\infty\right)$.

$$f'(x)=2x-\frac{4}{x^5}=\frac{2\left(x^6-2\right)}{x^5}.$$

Очевидно, что при $x>\sqrt[6]{2}$ $f'>0$. Тогда по достаточному условию монотонности функции на промежутке f возрастает при $x>\sqrt[6]{2}$, что и означает выполнение данного неравенства.

Ягубов Рф

2. $(в)$ ***Решить уравнение*** $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=\log_3\left(6x-x^2\right)$.

□ Если уравнение или неравенство выглядит очень страшно, т.е. содержит совершенно различные функции, например, как в нашем случае – рациональную и логарифмическую, или тригонометрическую и показательную функцию и т.д., то, скорее всего, в такой задаче сработает какое-либо из известных свойств функций: монотонность, выпуклость, ограниченность, четность или нечетность и т.д.

Исследуем обе части данного уравнения на ограниченность, предварительно найдя область допустимых значений уравнения.

$f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$, $\quad D_f=R\setminus\{0\}$,

$g(x)=\log_3\left(6x-x^2\right)$, $\quad D_g:\ 6x-x^2>0; x\in(0;6)$. $\quad D_g=(0;6)$.

ОДЗ: $x\in(0;6)$.

Найдя производную или воспользовавшись известным неравенством с суммой положительных взаимно обратных величин, видим ограниченность снизу функции f: $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\ge 2$, равенство достигается при $\frac{x}{3}=\frac{3}{x}$, т.е. при $x=3$.

Рассмотрим внимательнее логарифмируемое выражение в формуле функции g:

$$6x-x^2=9-9+6x-x^2=9-(x-3)^2\le 9;$$

тогда

$$g(x)=\log_3\left(6x-x^2\right)\le\log_3 9=2,$$

причем равенство достигается при $6x-x^2=9$, т.е. при $x=3$.

Левая часть уравнения не меньше 2, правая – не больше 2. Делаем вывод: уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x)=2 \\ g(x)=2. \end{cases}$

Так как оба равенства выполняются при одном и том же значении аргумента, $x=3$ – единственное решение уравнения.

Ответ: 3.

3. ***Доказать, что*** $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ ***, если*** $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

□ 1-й с п о с о б.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. Докажем ее неотрицательность при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Данная функция непрерывна и дифференцируема на указанном

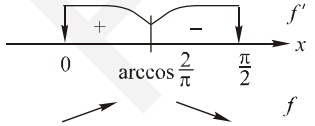
промежутке, и если она имеет на нем наименьшее значение, то для доказательства неотрицательности функции достаточно доказать неотрицательность ее наименьшего значения.

$$\left(\min_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f(x)>0\right)\Rightarrow\left(\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\quad f(x)>0\right).$$

Если же наименьшего значения нет, то нужно рассматривать пределы на границах данного промежутка.

$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$; $\quad f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$. $f'(x)=0$: $\cos x=\frac{2}{\pi}$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$x=\arccos\frac{2}{\pi}$.



f возрастает на $\left(0;\arccos\frac{2}{\pi}\right]$,

убывает на $\left[\arccos\frac{2}{\pi};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\max\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} f(x)=f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)$. Наименьшего значения нет.

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)=\sin 0-\frac{2}{\pi}\cdot 0=0;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1-1=0.$$

$$\left(\lim_{x\to 0+0} f(x)\ge 0,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)\ge 0\right)\ \Rightarrow\left(\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\ f(x)\ge 0\right),$$

т.е. можно сделать вывод о неотрицательности функции на заданном промежутке. Неравенство доказано.

2-й с п о с о б.

Вспомним графики левой и правой частей неравенства $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$, которое нам предлагается доказать. Левая часть – синусоида, на данном интервале $(0;\ \pi/2)$ обращена выпуклостью вверх (проверьте!). Правая часть – прямая, проходящая через начало координат.

Выделим следующее <u>утверждение</u>:

> Графики непрерывных функций, имеющие на данном **промежутке различную постоянную** выпуклость, могут на этом промежутке пересекаться **не более двух раз**.

Ягубов.рф

То же утверждение верно и в случае, когда один из графиков – прямая.

Можно воспользоваться этим утверждением, расширив область определения функций в левой и правой части неравенства до отрезка $[0;\ \pi/2]$.

Действительно, $\sin 0 = \frac{2}{\pi}\cdot 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$, т.е. $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$ – корни уравнения $\sin x = \frac{2}{\pi}x$. В силу утверждения о выпуклости других корней на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ нет. Тогда разность левой и правой частей, $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$, как непрерывная функция, не имеющая корней на интервале $(0;\ \pi/2)$, должна сохранять на нем знак, который мы определим по любой точке интервала. Например: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}>0$.

Неравенство доказано.

4. $(в)$ ***Доказать, что для всех положительных*** x ***справедливо неравенство*** $\ln\left(\sqrt{x}+0{,}5\right)\le x-0{,}25$.

□ Напомним и сформулируем словесно данное ранее, очевидное, но, тем не менее, очень полезное утверждение.

> Если функция имеет на промежутке наименьшее значение, то для доказательства неотрицательности (положительности) функции на этом промежутке достаточно доказать неотрицательность (положительность) ее наименьшего значения.
>
> Если функция имеет на промежутке наибольшее значение, то для доказательства неположительности (отрицательности) функции на этом промежутке достаточно доказать неположительность (отрицательность) ее наибольшего значения.

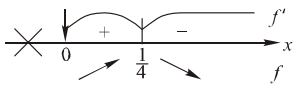
Аналогично можно сравнивать значения функции не с 0, а с любым другим числом.

Рассмотрим функцию – разность левой и правой частей неравенства:

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x}+0{,}5\right)-x+0{,}25.$$

Исследуем $f(x)$ на монотонность на $(0;\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+0{,}5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=\frac{1-2x-\sqrt{x}}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-2\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}.$$



$f'(x)=0:\ \sqrt{x}=1/2;\ \ x=1/4.$

$f(x)$ возрастает на $(0;\ 1/4]$, убывает на $[1/4;\ \infty)$.

Наибольшее значение функции достигается при $x=1/4$.

$$\max_{(0;\infty)} f(x)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}}+0{,}5\right)-\frac{1}{4}+0{,}25=\ln 1-0{,}25+0{,}25=0.$$

Тогда $\forall x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\infty\right)\ \ f(x)<f\left(\frac{1}{4}\right)=0$.

Неравенство доказано.

5. $(в)$ Приведем один из наиболее «дешевых» и красивых способов доказательства известного **неравенства Коши** для среднего арифметического и среднего геометрического n неотрицательных чисел:

> $\forall a_1\ge 0,\ a_2\ge 0,\ \ldots,\ a_n\ge 0\quad \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$,
> причем равенство достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_n$

Доказательство.

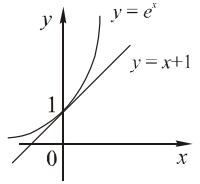
Заметим, что если хотя бы одно из чисел равно 0, то неравенство выполняется. Пусть теперь все числа ненулевые. Докажем неравенство, полученное из данного делением обеих частей на положительную величину $\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}{n}$:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}+\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}\ge n.$$

Обозначим $\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}=b_1,\ \ldots,\ \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}}=b_n$. Теперь требуется доказать, что для любых положительных чисел $b_1,\ldots,\ b_n$, таких, что $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n=1$, выполняется неравенство $b_1+\ldots+b_n\ge n$.

Так как $(e^x)'(0)=1$, то прямая $y=x+1$ является касательной к кривой $y=e^x$, тогда $\forall x\in R\ \ e^x\ge x+1$ (равенство при $x=0$); или $e^{x-1}\ge x$ (равенство при $x=1$).

$$\begin{cases} e^{b_1-1}\ge b_1,\\ e^{b_2-1}\ge b_2,\\ \ldots\\ e^{b_n-1}\ge b_n. \end{cases}$$



Перемножим все неравенства, записанные в системе. $e^{b_1+\ldots+b_n-n}\ge b_1b_2\ldots b_n=1$. Прологарифмируем неравенство по основанию e:

$$b_1+\ldots b_n-n\ge\ln 1=0,\ \text{т.е. } b_1+\ldots+b_n\ge n,$$

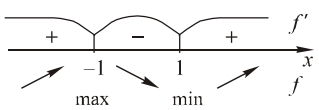
что и требовалось доказать.

Заметим, что равенство достигается в том и только в том случае, когда все неравенства системы обращаются в равенства, т.е. $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$, т.е. $a_1 = a_2 = ... = a_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$.

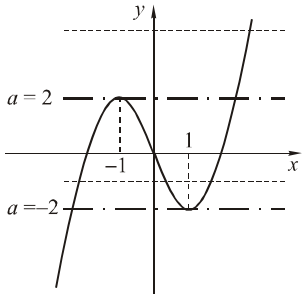
6. ***Найти количество решений уравнения*** $x^3 - 3x = a$ ***в зависимости от значений параметра*** a.

□ Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x$.

Найдем ее область определения, промежутки монотонности, точки экстремума, значения в точках экстремума, пределы в точках разрыва и на бесконечности, и изобразим эскиз графика функции.



$$D_f = R; \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); \quad f'(x) = 0: \quad x = \pm 1.$$



$$f(-1) = -1 + 3 = 2; \quad f(1) = 1 - 3 = -2.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty.$$

Теперь (мысленно) будем проводить горизонтальные прямые $y = a$ и отслеживать количество их пересечений с графиком.

Важно уметь выделить «граничные» значения параметра a.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ – 1 решение;

при $a \in \{\pm 2\}$ – 2 решения; при $a \in (-2; 2)$ – 3 решения.

7. ***Найти количество решений уравнения*** $2\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-6} = ax + 2$ ***в зависимости от значений параметра*** a.

□ Изобразим эскизный график левой $f(x) = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-6}$ и правой $g(x) = ax + 2$ частей уравнения, после чего найдем количество пересечений в зависимости от параметра a.

$$f(x) = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-6}; \quad D_f = [2; \infty);$$

$$f(2) = 2; \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{3}{2\sqrt{3x-6}} > 0 \quad \forall x > 2;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} - \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2(3x-6)\sqrt{3x-6}} < 0 \quad \forall x > 2.$$

«Расшифруем» выводы: график «стартует» из точки $(2;2)$, далее возрастает, обращен выпуклостью вверх.

Теперь обратимся к правой части равенства: $g(x) = ax + 2$. Это семейство прямых, проходящих через точку $(0;2)$, с переменным в зависимости от параметра угловым коэффициентом (семейство прямых, «вращающихся» вокруг точки $(0;2)$).

«Граничных» значений a два: $a = 0$ и $a = a_0$, соответствующее случаю касания.

Если мы сейчас найдем a_0, то сможем дать ответ в задаче.

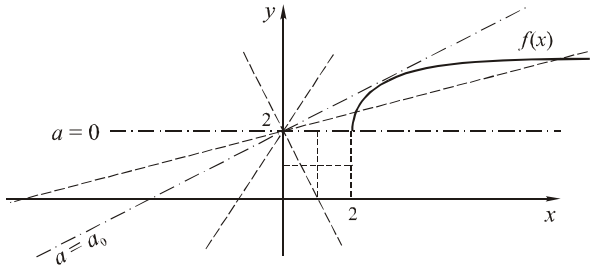
Уравнение касательной:

$$y = 2\sqrt{x_0 - 1} + \sqrt{3x_0 - 6} + \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3}{2\sqrt{3x_0 - 6}} \right)(x - x_0);$$

$$y = x\left(\frac{1}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3}{2\sqrt{3x_0 - 6}} \right) + \frac{2(x_0 - 1) - x_0}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{2(3x_0 - 6) - 3x_0}{2\sqrt{3x_0 - 6}};$$

$$y = x\left(\frac{1}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3}{2\sqrt{3x_0 - 6}} \right) + \frac{x_0 - 2}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3x_0 - 12}{2\sqrt{3x_0 - 6}}.$$

Касательная должна совпасть с прямой $y = ax + 2$, т.е. x_0 должно найтись из условия $\frac{x_0 - 2}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3x_0 - 12}{2\sqrt{3x_0 - 6}} = 2$. «Честное» решение данного уравнения представляет довольно значительную сложность, но нас выручит одно обстоятельство, очевидное для внимательных.



Если проанализировать данный выше график, то можно заметить, что точка касания единственна, т.е. если мы каким-то чудом ее угадаем, то мы узнаем **единственное** решение уравнения $\frac{x_0 - 2}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3x_0 - 12}{2\sqrt{3x_0 - 6}} = 2$.

Можно также с помощью производной доказать монотонность функции $t(x_0) = \frac{x_0 - 2}{\sqrt{x_0 - 1}} + \frac{3x_0 - 12}{2\sqrt{3x_0 - 6}}$, а затем сослаться на следующее утверждение.

Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x)=C$ $(C\in R)$ имеет не более одного решения на X.

Или: Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке X, функция $g(x)$ монотонно убывает на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на X.

Теперь дело за малым – угадать решение уравнения $\frac{x_0-2}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3x_0-12}{2\sqrt{3x_0-6}}=2$.

Понадеемся на гуманизм составителей задания, т.е. предположим, что корни извлекаются. Тогда для начала проверим, не содержится ли корень x_0 среди чисел, дающих полные квадраты в подкоренном выражении $x_0-1=4;9;16;...$ Убеждаемся, что число 5 – корень!

$$\left(\frac{5-2}{\sqrt{5-1}}+\frac{15-12}{2\sqrt{15-6}}=\frac{3}{\sqrt{4}}+\frac{3}{2\sqrt{9}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\right).$$

Итак, $x_0=5$. Возвращаемся к уравнению касательной и находим a_0:

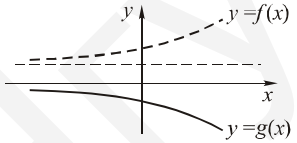
$$a_0=\frac{1}{\sqrt{x_0-1}}+\frac{3}{2\sqrt{3x_0-6}}=\frac{1}{\sqrt{5-1}}+\frac{3}{2\sqrt{15-6}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Смотрим на график, мысленно вращаем прямую вокруг точки $(0;2)$, начиная от вертикального положения, соответствующего пределу a $(-\infty)$, и заканчивая другим вертикальным положением, соответствующим пределу a $(+\infty)$.

Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ – нет решений;

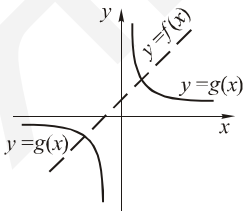
при $a\in\{0;1\}$ – 1 решение; при $a\in(0;1)$ – 2 решения.

Комментарий. Ни в коем случае нельзя использовать данное ранее утверждение в любой из следующих **неверных** форм (приводим их только потому, что очень часто в этом месте бывают ошибки):



«Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке X, функция $g(x)$ монотонно убывает на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение на X».

Контрпример (см. рис.): нет решений.



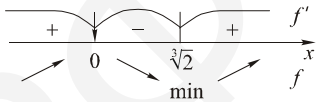
«Если $f'(x)>0$ на множестве X, $g'(x)<0$ на множестве X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на X».

Контрпример (см. рис.): здесь $X=R\setminus\{0\}$, два решения.

8. ***Найти количество решений уравнения*** $x+1+\frac{1}{x^2}=ax+4$ ***в зависимости от значений параметра*** a.

□ 1-й способ.

Решаем аналогично задаче 6: $f(x)=x+1+\frac{1}{x^2}$; $D_f=R\setminus\{0\}$;



$$f'(x)=1-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-2}{x^3}.$$

$$f'(x)=0:\quad x=\sqrt[3]{2}.$$

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{2}+1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2+1}{\sqrt[3]{4}}+1=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+1.$$

$x=0$ – точка разрыва.

$$\lim_{x\to0\pm0}f(x)=\lim_{x\to0\pm0}(x+1+\frac{1}{x^2})=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1+\frac{1}{x^2})=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1+\frac{1}{x^2})=+\infty.$$

Для аккуратного построения графика добавим еще сведение о наличии наклонной асимптоты $y=x+1$.

$y=ax+4$ – семейство прямых, вращающихся вокруг точки $(0;4)$.

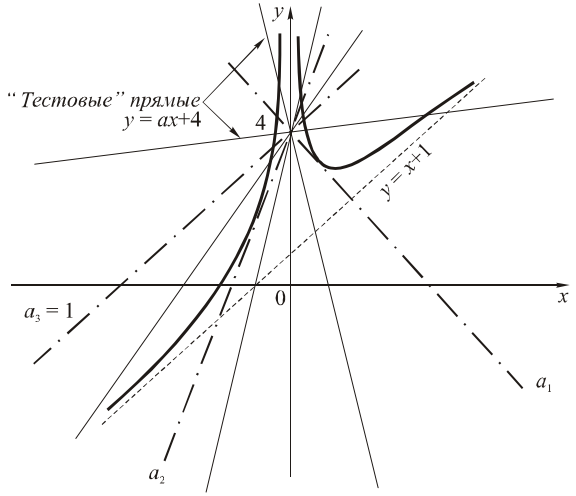
a_1 и a_2 находятся из условия касания прямой $y=ax+4$ и графика функции $f(x)=x+1+\frac{1}{x^2}$:

$f'(x)=1-\frac{2}{x^3}$; уравнение касательной:

$$y=x_0+1+\frac{1}{x_0^2}+\left(1-\frac{2}{x_0^3}\right)(x-x_0);$$

$$y=x\left(1-\frac{2}{x_0^3}\right)+x_0+1+\frac{1}{x_0^2}-x_0+\frac{2}{x_0^2};$$

$$y=x\left(1-\frac{2}{x_0^3}\right)+1+\frac{3}{x_0^2}$$



Касательная совпадает с прямой $y = ax + 4$:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{3}{x_0^{\,2}} = 4 \\ 1-\dfrac{2}{x_0^{\,3}} = a, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ a = 1-\dfrac{2}{x_0^{\,3}}, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 1 \\ a = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -1 \\ a = 3. \end{cases} \end{array}\right. \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 3.$$

Ответ: при $a \in (-\infty;-1)\cup(3;\infty)$ – 1 решение;

при $a = -1$; $a = 1$; $a = 3$ – 2 решения;

при $a \in (-1;1)\cup(1;3)$ – 3 решения.

2-й с п о с о б.

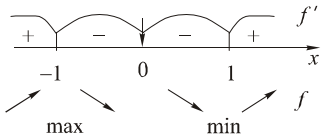
Решаем аналогично задаче 5:

$$x + 1 + \frac{1}{x^2} = ax + 4 .$$

Заметим, что $x \neq 0$ по условию. Тогда можно выразить a:

$$ax = x - 3 + \frac{1}{x^2}; \qquad a = 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}$. $D_f = R \setminus \{0\}$;



$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{3(x^2-1)}{x^4}. \quad f'(x) = 0: \quad x = \pm 1.$$

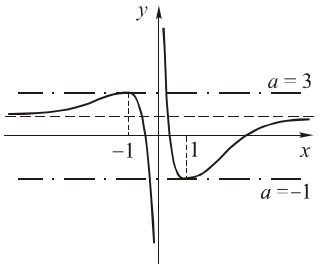
$$f(-1) = 1 + 3 - 1 = 3; \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1.$$

$y = 1$ – горизонтальная асимптота.



Ответ: при $a \in (-\infty;-1)\cup(3;\infty)$ – 1 решение;

при $a = -1$; $a = 1$; $a = 3$ – 2 решения;

при $a \in (-1;1)\cup(1;3)$ – 3 решения.

Общее **замечание**. При решении задач с вопросами о количестве решений недостаточно исследовать функцию на монотонность и экстремумы. Нужно знать поведение функции в окрестности точек разрыва и на бесконечности, учитывая, например, возможность наличия горизонтальной асимптоты.

9. ***Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x + 2(a-1)\sqrt{x} + 3 - a = 0$ имеет решения.***

☐ 1-й с п о с о б (теорема Виета).

Первый шаг очевиден: вводим новую переменную $t = \sqrt{x} \geq 0$. Исходное уравнение имеет решения в точности тогда, когда уравнение

$$t^2 + 2(a-1)t + 3 - a = 0 . \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно неотрицательное решение. Заметим, что коэффициент при t^2 не зависит от параметра, т.е. уравнение (1) является квадратным при любом значении параметра.

Скорее всего, вам тоже приходит в голову изложенное ниже соображение. Проще ответить не на поставленный вопрос, а на противоположный: «При каких значениях параметра a уравнение (1) не имеет неотрицательных корней (т.е. либо не имеет корней вовсе, либо имеет, но они все отрицательны)?» Если знать ответ на такой вопрос, то ответ на вопрос задачи получается вычитанием полученного множества значений параметра из R.

При каких же значениях a уравнение (1) не имеет неотрицательных корней?

1. $D < 0$ (корней нет вовсе).

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3 + a = (a-1)^2 + (a-1) - 2 < 0,$$

$$(a-1) \in (-2;1),$$

$$a \in (-1;2).$$

2. $(D \ge 0)$, $t_1 < 0,\ t_2 < 0$.

(Почему условие $D \ge 0$ в скобках? Да просто: если $D < 0$, то неотрицательных корней тоже нет!)

Еще **замечание**. Корень 2-й кратности при постановке условия на знаки можно считать парой совпадающих корней.

$$t_1 + t_2 < 0,\ t_1 \cdot t_2 > 0, \quad \begin{cases} 2(1-a) < 0 \\ 3 - a > 0, \end{cases} \quad a \in (1;3).$$

(Сумма отрицательна, произведение положительно.)

$$\begin{bmatrix} a \in (-1;2) \\ a \in (1;3) \end{bmatrix} \quad a \in (-1;3) \text{ – нет неотрицательных корней.}$$

Тогда при $a \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty)$ неотрицательные корни есть!

Ответ: $a \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty)$.

2-й с п о с о б (теоремы о расположении корней квадратного трехчлена).

Начало решения повторяем: замена переменной.

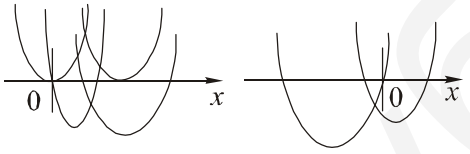
$$t^2 + 2(a-1)t + 3 - a = 0; \qquad t = \sqrt{x} \ge 0.$$

Графиком квадратичной функции $y = t^2 + 2(a-1)t + 3 - a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Для этой функции

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 3 + a = a^2 - a - 2, \quad t_0 = 1 - a, \quad y(0) = 3 - a.$$

Есть неотрицательные корни:



$$\begin{cases} y(0) \ge 0 \\ t_0 \ge 0 \\ D \ge 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} y(0) \le 0 \\ 3 - a \le 0 \\ a \ge 3. \end{matrix} \quad \begin{cases} 3 - a \ge 0 \\ 1 - a \ge 0 \\ a^2 - a - 2 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \le 3 \\ a \le 1 \\ a \in (-\infty;-1] \cup [2;\infty); \end{cases} \quad a \in (-\infty;-1].$$

Объединяем два случая: $a \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty)$.

3-й с п о с о б (выражаем параметр и исследуем функцию; такой способ хорош при линейном вхождении в задачу параметра).

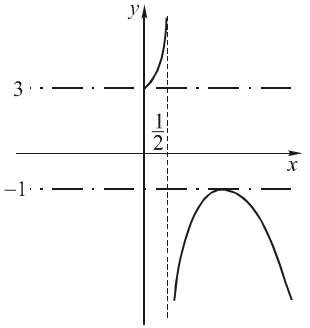
Сгруппируем выражение (1) по-другому, выделив a:

$$a(2t-1) = -t^2 + 2t - 3.$$

Заметим, что $t = 1/2$ не является решением уравнения ни при каких значениях параметра a.

Тогда можно, разделив на $2t-1$ обе части полученного уравнения, выразить параметр.

$$a = \frac{t^2 - 2t + 3}{1 - 2t}.$$



Далее исследуем функцию $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 3}{1 - 2t}$, $t \ge 0$, строим эскиз графика $y = f(t)$ и отслеживаем количество пересечений его с прямой $y = a$ в зависимости от a.

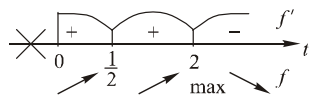
$$D_f = \left[0;\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2};\infty\right).$$

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(1-2t) + 2\left(t^2 - 2t + 3\right)}{(1-2t)^2} = \frac{-2t^2 + 2t + 4}{(1-2t)^2} = \frac{-2(t+1)(t-2)}{(1-2t)^2}.$$

$$D_{f'} = D_f. \qquad f'(t) = 0: \quad t = 2 \quad \left(-1 \notin D_f\right)$$

$f(0) = 3;\ f(2) = -1;\ \lim\limits_{t \to \frac{1}{2} - 0} f(t) = +\infty;$

$\lim\limits_{t \to \frac{1}{2} + 0} f(t) = -\infty;\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -\infty.$



Заметим, что для ответа на вопрос данной задачи наличие или отсутствие наклонных асимптот, а также характер выпуклости не имеют никакого значения.

Ответ: $a \in (-\infty;-1] \cup [3;\infty)$.

10. ***Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| \ge x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.***

□ 1 с п о с о б. Используем графический способ с применением касательной, причем касательную к параболе можно находить без применения производной.

Для начала сделаем как можно проще ту часть неравенства, которая содержит параметр: $|x - a| \le 3 - x^2$. Затем построим график правой части неравенства и поймем, что представляет собой график левой части при каждом значении параметра.

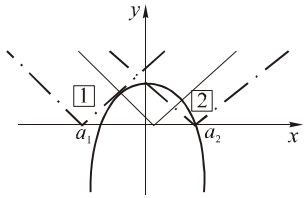
$y = 3 - x^2$ – парабола, ветви которой направлены вниз, вершина – в точке $(0;3)$.

$y = |x - a|$ – семейство «галок», полученных из графика $y = |x|$ перемещением вершины в точку $(a;0)$.

Наша задача: мысленно перемещая «галку», например, слева направо (от $-\infty$ к $+\infty$), понять, при каких ее положениях в отрицательной части оси абсцисс найдется хотя бы одно значение x, при котором «галка» не выше параболы. Итак, рисуем.

«Галка» 1 – правая ветвь $(y = x - a)$ касается параболы.

«Галка» 2 – левая ветвь $(y = a - x)$ проходит через вершину параболы.



Искомые значения a (внимательно читаем условие!) находятся на промежутке $[a_1; a_2)$.

1. Уравнение $3 - x^2 = x - a$ имеет единственное решение.

$$x^2 + x - a - 3 = 0; \quad D = 1 + 4(a+3) = 4a + 13 = 0; \quad a_1 = -\frac{13}{4} = -3{,}25.$$

2. $3 = a - 0; \quad a_2 = 3.$

Ответ: $a \in [-3{,}25; 3)$.

2-й с п о с о б . «Быстрое» решение «в одну картинку».

Построим график неравенства в осях $x0a$:

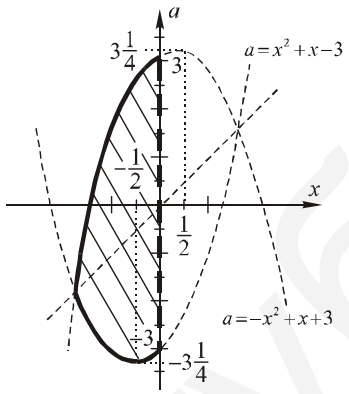
$$3 - |x - a| \ge x^2; \; |x - a| \le 3 - x^2;$$

$$x^2 - 3 \le x - a \le 3 - x^2.$$

(Использован известный равносильный переход:

$$\left(|f(x)| \le g(x)\right) \Leftrightarrow \left(-g(x) \le f(x) \le g(x)\right)$$

$$\begin{cases} a \le -x^2 + x + 3, \\ a \ge x^2 + x - 3. \end{cases}$$



Заметим, что пересечение парабол происходит на прямой $a = x$ (когда подмодульное выражение обнуляется).

Берем ту часть области между параболами, где $x < 0$ (см. условие). Считываем с картинки ответ.

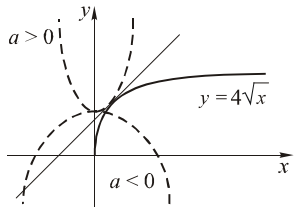
Ответ: $a \in \left[-3\frac{1}{4};\ 3\right)$.

11. ***При каких значениях параметра*** a ***система*** $\begin{cases} y = 1 + \dfrac{x^2}{a^3} \\ y = 4\sqrt{x} \end{cases}$ ***имеет одно решение?***

☐ 1-й с п о с о б (как написано, так и делаем!)

$y = 1 + \dfrac{x^2}{a^3}$ – парабола. При $a < 0$ ветви направлены вниз, при $a > 0$ – вверх (при $a = 0$ система не имеет смысла).

$y = 4\sqrt{x}$ – ветвь параболы. Сделаем чертеж и найдем условие, при котором точка пересечения единственна.



Анализируем: при $a < 0$ решение единственно всегда; при $a > 0$ решение единственно только в случае касания (в отличие от задачи о нахождении просто общей касательной к двум кривым, здесь не только должна быть общая касательная, но и точки касания должны совпадать!).

Записываем уравнения касательных к обеим кривым в некоторой точке с абсциссой b.

$$y = 1 + \frac{x^2}{a^3}; \quad y' = \frac{2x}{a^3};$$

$$y = 1 + \frac{b^2}{a^3} + \frac{2b}{a^3}(x - b); \quad y = x\frac{2b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3} + 1.$$

$$y = 4\sqrt{x}; \quad y' = \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$y = 4\sqrt{b} + \frac{2}{\sqrt{b}}(x - b); \quad y = x\frac{2}{\sqrt{b}} + 2\sqrt{b}.$$

Условие совпадения касательных:

$$\begin{cases} \dfrac{2b}{a^3} = \dfrac{2}{\sqrt{b}} \\ -\dfrac{b^2}{a^3} + 1 = 2\sqrt{b}, \end{cases} \quad \begin{cases} b\sqrt{b} = a^3 \\ b^2 + 2a^3\sqrt{b} = a^3, \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{b} \\ 3a^4 = a^3, \end{cases} \quad a^3(3a - 1) = 0, \quad a = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{1/3\}$.

Замечание. Тот же способ можно применить, предварительно проведя замену переменной $t = \sqrt{x} \ge 0$. Тогда система принимает вид $\begin{cases} y = 1 + \left(t^4 / a^3\right) \\ y = 4t \end{cases}$.

В этом случае одно из уравнений системы задает прямую, и уравнение касательной нужно писать один раз, а не два.

2-й с п о с о б.

Сделаем указанную выше замену переменной:

$$t = \sqrt{x} \ge 0; \quad \begin{cases} y = 1 + \dfrac{t^4}{a^3}; \\ y = 4t \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{t^4}{a^3} = 4t - 1 \\ y = 4t. \end{cases}$$

Каждому неотрицательному значению t соответствует ровно одно решение исходной системы $(x; y)$.

Отметим, что $t=1/4$ не дает решения системы. Выразим a^3 : $a^3=\dfrac{t^4}{4t-1}$. Далее поступим по уже знакомой схеме: исследование функции $f(t)=\dfrac{t^4}{4t-1}$, $t\ge 0$; график; ответ.

$$D_f=\left[0;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{4};\infty\right);$$

$$f'(t)=\frac{4t^3(4t-1)-4t^4}{(4t-1)^2}=\frac{4t^3(4t-1-t)}{(4t-1)^2}=\frac{4t^3(3t-1)}{(4t-1)^2};$$

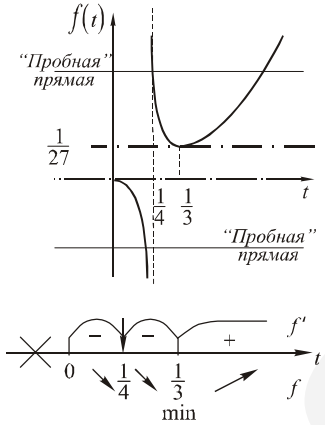
$D_{f'}=D_f$; $f'(t)=0$: $t=\dfrac{1}{3}$, $t=0$.

$f(0)=0$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{81\left(\dfrac{4}{3}-1\right)}=\dfrac{1}{27}$.

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{4}-0} f(t)=-\infty$;

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{4}+0} f(t)=+\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$.



Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

12. ***Доказать:*** а) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4\le\dfrac{a^4+b^4}{2}$, где $a\ge 0, b\ge 0$;

б) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p\le\dfrac{a^p+b^p}{2}$, где $a\ge 0, b\ge 0, p>1$;

в) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

Задание а) является частным случаем задания б), так что начнем решение прямо с б).

□ б) Рассмотрим функцию $y=x^p$, $p>1$, $D_y=(0;\infty)$.

$$y'=px^{p-1};\ y''=p(p-1)x^{p-2}>0.$$

По достаточному условию выпуклости график функции обращен выпуклостью вниз. Тогда доказательство заключается в ссылке на данное в начале главы утверждение (свойство выпуклой вниз функции).

в) 1-й с п о с о б.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x>0$.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad f''(x)=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}<0.$$

По достаточному условию выпуклости график функции обращен выпуклостью вверх. Тогда выполняется следующее свойство выпуклости:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ge\frac{f(a)+f(b)}{2}, \text{ т.е.}$$

$$f\left(\frac{\left(3+\sqrt[3]{3}\right)+\left(3-\sqrt[3]{3}\right)}{2}\right)\ge\frac{f\left(3+\sqrt[3]{3}\right)+f\left(3-\sqrt[3]{3}\right)}{2}\ \left(a=3+\sqrt[3]{3}, b=3-\sqrt[3]{3}\right),$$

т.е. $\sqrt[3]{3}\ge\dfrac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2}$, $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\le 2\sqrt[3]{3}$.

Доказанное отличается от требования условия нестрогим знаком неравенства. Но если вспомнить, что равенство в свойстве выпуклости бывает только при $a=b$, а $3+\sqrt[3]{3}\ne 3-\sqrt[3]{3}$. Тогда неравенство доказано.

2-й с п о с о б.

Напомним неравенство Коши для трех чисел: $\dfrac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}$, если $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$, причем среди чисел a, b, c есть неравные.

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}<\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3}=\frac{3\sqrt[3]{3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3};$$

аналогично

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)}<\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3}=\frac{3\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3}.$$

Складываем два неравенства:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<\frac{3\sqrt[3]{3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}}{3}=2\sqrt[3]{3}.$$

3-й с п о с о б.

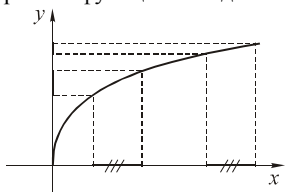
Докажем неравенство в более общем виде:

$$\sqrt[n]{a+b}+\sqrt[n]{a-b}<2\sqrt[n]{a}\qquad\forall a>b>0, n\in N\setminus\{1\}.$$

Рассмотрим функцию $y=x^{\frac{1}{n}}$ $(x>0)$;

$$y' = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} > 0; \quad y'' = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)x^{(1/n)-2} < 0 .$$

Функция $y = x^{1/n}$ возрастает; ее производная убывает. Чем больше производная, тем быстрее растет функция, а чем меньше производная, тем медленнее растет функция. В данном случае функция возрастает, но скорость роста тем меньше, чем дальше от 0. Пусть есть два отрезка оси абсцисс одинаковой длины, из которых один дальше от 0, а другой ближе к 0. Тогда одинаковому приращению аргумента (длина отрезка) соответствует большее приращение функции на более близком к 0 отрезке, и меньшее приращение функции на более удаленном от 0 отрезке.



Два отрезка: $[a-b;a]$ и $[a;a+b]$. Тогда

$$y(a) - y(a-b) > y(a+b) - y(a),$$

$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a+b} - \sqrt[n]{a}$, что и требовалось доказать.

13. (*в*) ***Решить уравнение*** $\log_2 \dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+\sqrt{x^2+16}} + 9x + 14 = 0$.

□ Задача относится к серии очень специфических вопросов на монотонность. Но для этого нужно переписать уравнение, выделив в левой и в правой части значения одной и той же монотонной функции при разных (точнее, различно записанных) значениях аргумента, зависящих от переменной x. Сформулируем основную идею решения.

Если функция $f(t)$ строго монотонна на промежутке T, $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ и $f(t_1) = f(t_2)$, то $t_1 = t_2$.

Точнее, уравнения $t_1(x) = t_2(x)$ и $f(t_1(x)) = f(t_2(x))$ равносильны, если f **монотонна** на T, $E_{t_1} \subseteq T, E_{t_2} \subseteq T$.

Займемся нашим уравнением.

$$\log_2 \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+\sqrt{x^2+16}} + 9x + 14 = 0 .$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что

$\forall x \in R \quad x+1+\sqrt{x^2+2x+2} = (x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1} > 0, \quad x+\sqrt{x^2+16} > 0.$

Тогда, не изменяя области определения, можно применить свойство логарифма:

$$\log_2 \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+\sqrt{x^2+16}} + 9x + 14 = \log_2\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) -$$

$$-\log_2\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + 9x + 14 = \log_2\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) + 2 -$$

$$-\log_2\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + 9x + 12 = = \log_2\left(4(x+1)+\sqrt{(4(x+1))^2+16}\right) -$$

$$-\log_2\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + 3(4(x+1)) - 3x = \log_2\left(4(x+1)+\sqrt{(4(x+1))^2+16}\right) +$$

$$+3(4(x+1)) - (\log_2\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + 3x) = f(4(x+1)) - f(x),$$

где $f(t) = \log_2\left(t+\sqrt{t^2+16}\right) + 3t$.

Исследуем $f(t)$ на монотонность.

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 2\left(t+\sqrt{t^2+16}\right)}\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+16}}\right) + 3 =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{t^2+16}+t\right)}{\ln 2\left(t+\sqrt{t^2+16}\right)\sqrt{t^2+16}} + 3 > 0 \quad \forall t \in R .$$

Тогда f возрастает на R. Исходное уравнение равносильно уравнению $4(x+1) = x$. $4x+4 = x$; $3x = -4$; $x = -4/3$.

Ответ: $-1\dfrac{1}{3}$.

14. ***При каких значениях параметра*** a ***неравенство*** $\dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} \geq a$ ***верно при всех*** $x \in R$ ***?***

□ 1-й способ («автоматический» почти не требующий размышлений. Достаточно аккуратно применить навыки решения задач по математическому анализу).

Пусть $f(x) = \dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}$. $\quad D_f: \quad 9x^2-3x+1 \neq 0$

$D = 9 - 4 \cdot 9 < 0, \qquad D_f = R .$

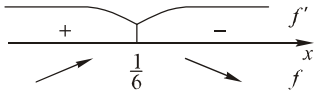
Исследуем функцию $f(x)$ на монотонность с помощью производной, найдем пределы на бесконечности и значения в точках экстремума.

Чтобы задача имела решение, нужно, чтобы множество значений $f(x)$ являлось ограниченным снизу. Пусть точная нижняя грань E_f – число a_0. Тогда решением задачи будет промежуток $(-\infty; a_0]$. Найдем E_f .

$$f'(x)=\frac{(12x-2)\left(9x^2-3x+1\right)-(18x-3)\left(6x^2-2x+1\right)}{\left(9x^2-3x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(6x-1)\left(18x^2-6x+2-18x^2+6x-3\right)}{\left(9x^2-3x+1\right)^2}=\frac{-(6x-1)}{\left(9x^2-3x+1\right)^2}.$$

Критические точки:



$6x-1=0;\quad x=\frac{1}{6}$.

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\frac{10}{9};\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};\qquad E_f=\left(\frac{2}{3};\frac{10}{9}\right].$$

Ответ: неравенство верно при всех $x\in R$ при $a\in(-\infty;\ 2/3]$.

2-й способ (рассуждения те же, но для нахождения E_f можно не прибегать к понятию производной: ограничимся элементарными средствами).

$$f(x)=\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}=\frac{\left(9x^2-3x+1\right)\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{9x^2-3x+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9x^2-3x+1}.$$

Рассмотрим

$$g(x)=9x^2-3x+1=9\left(x^2-x\cdot 2\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right)-\frac{9}{36}+1=9\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

(или найдем ординату вершины параболы $y=g(x)$).

$$E_g=\left[\frac{3}{4};\infty\right).\quad E_{\frac{1}{g}}=\left(0;\frac{4}{3}\right];\quad E_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{g}}=\left(0;\frac{4}{9}\right]\quad E_f=E_{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{g}}=\left(\frac{2}{3};\frac{10}{9}\right].$$

Ответ: неравенство верно при всех $x\in R$ при $a\in(-\infty;\ 2/3]$.

3-й способ (методы 8 – 9 класса!).

Заметим, что знаменатель дроби всегда положителен. Домножим на него обе части неравенства, получив равносильное неравенство, и переформулируем задачу (логический момент!).

$$\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}\ge a;\quad 6x^2-2x+1\ge a\left(9x^2-3x+1\right);$$

$$x^2(9a-6)+x(2-3a)+a-1\le 0. \qquad (2)$$

При каких значениях параметра a неравенство (2) выполняется при всех $x\in R$? Определим тип неравенства: при $a=2/3$ – линейное; при $a\ne 2/3$ – квадратичное.

1. $a=2/3$: $0\cdot x^2+0\cdot x-(1/3)\le 0$ – верно.

2. $a\ne 2/3$: неравенство квадратичное; графиком функции $h(x)=(9a-6)x^2+(2-3a)x+a-1$ является парабола. Чтобы вся парабола находилась в нижней полуплоскости (включая, быть может, границу), необходимо и достаточно, чтобы ветви параболы были направлены вниз, т.е. коэффициент при x^2 был отрицательным, а количество корней не превышало 1, т.е. $D\le 0$.

$$\begin{cases}9a-6<0\\ D=(2-3a)^2+4(a-1)(6-9a)\le 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}a<\frac{2}{3}\\ (2-3a)(2-3a+12a-12)\le 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-\frac{2}{3}<0\\ \left(a-\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{10}{9}\right)\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}a<\frac{2}{3}\\ a\le\frac{10}{9};\end{cases}\qquad a<\frac{2}{3}.$$

Совокупность 1-го и 2-го случаев дает ответ.

Ответ: неравенство верно при всех $x\in R$ при $a\in(-\infty;\ 2/3]$.

15. (*в*) ***При каждом значении параметра*** a ***определить количество решений уравнения*** $\ln^2 x=\frac{a}{x}$.

□ Исследовать взаимное расположение графиков левой и правой частей достаточно затруднительно, поэтому воспользуемся областью определения уравнения и выразим параметр, домножив обе части уравнения на x (отмечаем вслух, что, вообще говоря, домножать на выражение с переменной **нельзя**, но здесь можно, так как $x>0$ из условия):

$$a=f(x)=x\ln^2 x.$$

Для ответа на вопрос о количестве решений уравнения $a=f(x)$ нужно исследовать следующие свойства функции $f(x)$ (кроме D_f):

– промежутки монотонности;

– наличие точек экстремума и значения в них;

– непрерывность и наличие пределов функции в точках разрыва и на границах области определения.

$f(x)=x\ln^2 x$ непрерывна на $(0;\infty)$ как произведение непрерывных функций.

$$\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln^2 y}{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{\sqrt{y}}\right)^2=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln^2 x\right)=+\infty;$$

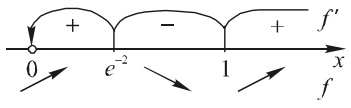
$$f'(x)=\ln^2 x+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x=\ln^2 x+2\ln x=\ln x(\ln x+2).$$

Критические точки:

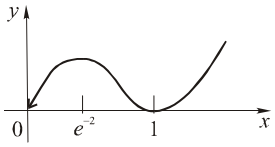
$\ln x=0$, $x=1$; $\ln x=-2$, $x=e^{-2}$.

$x=e^{-2}$ – точка максимума; $f(e^{-2})=4e^{-2}$.

$x=1$ – точка минимума; $f(1)=0$.



По эскизу графика отвечаем на вопрос о количестве пересечений прямой $y=a$ с графиком $y=f(x)$:



Ответ: единственное решение уравнение имеет при $a\in\{0\}\cup(4e^{-2};+\infty)$.

16. ***При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет единственный корень?***

Хорошо, если учащийся умеет решать подобную задачу несколькими способами. Предлагаем, например, следующие 6 решений.

☐ 1-й способ («лобовой», т.е. предполагающий переход к равносильной системе и решение иррациональных неравенств).

$$\left(\sqrt{x+1}=x+a\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=(x+a)^2\\ x+a\ge 0,\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+x(2a-1)+a^2-1=0\\ x\ge -a.\end{cases}$$

Найдем x_0 и D. $x_0=\dfrac{1-2a}{2}$;

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=4a^2-4a+1-4a^2+4=5-4a.$$

Возможны два случая.

1. $\begin{cases}D=0\\ x_0\ge -a,\end{cases}\quad\begin{cases}5-4a=0\\ \dfrac{1-2a}{2}\ge -a,\end{cases}\quad\begin{cases}a=\dfrac{5}{4}\\ \dfrac{1-\frac{5}{2}}{2}\ge -\dfrac{5}{4},\end{cases}\quad -\dfrac{3}{4}\ge -\dfrac{5}{4}$ – верно.

При $a=5/4$ уравнение имеет единственное решение.

2. $\begin{cases}D>0\\ x_1<-a\\ x_2\ge -a,\end{cases}\quad\begin{cases}5-4a>0\\ \dfrac{1-2a-\sqrt{5-4a}}{2}<-a\\ \dfrac{1-2a+\sqrt{5-4a}}{2}\ge -a,\end{cases}\quad\begin{cases}a<\dfrac{5}{4}\\ \sqrt{5-4a}>1\\ \sqrt{5-4a}\ge -1,\end{cases}\quad\begin{cases}a<\dfrac{5}{4}\\ 5-4a>1,\end{cases}\quad a<1.$

При $a<1$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in(-\infty;1)\cup\{5/4\}$.

2-й способ (то же, но решение иррациональных неравенств заменяется на применение теорем о расположении корней квадратного трехчлена (рисование парабол)).

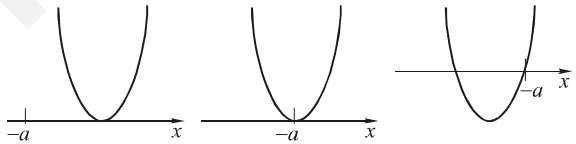
$$\begin{cases}x+1=(x+a)^2\\ x\ge -a,\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+2ax+a^2-x-1=0\\ x^2+x(2a-1)+(a^2-1)=0\end{cases}.$$

Графиком функции $f(x)=x^2+x(2a-1)+a^2-1$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

$$f(-a)=a^2-a(2a-1)+a^2-1=a^2-2a^2+a+a^2-1=a-1,$$

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=5-4a,\quad x_0=\frac{1-2a}{2}.$$

Чтобы на промежутке $[-a;\infty)$ был единственный корень уравнения, должен реализоваться один из следующих случаев:



$\begin{cases}D=0\\ x_0\ge -a,\end{cases}$ $\begin{cases}5-4a=0\\ \dfrac{1-2a}{2}\ge -a,\end{cases}$ $a=\dfrac{5}{4}$.

$f(-a)<0$, $a-1<0$, $a<1$.

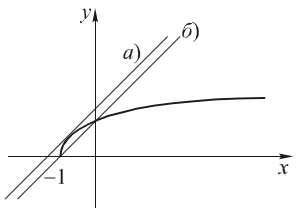
$\begin{cases}f(-a)=0\\ x_0<-a,\end{cases}$ $\begin{cases}a-1=0\\ \dfrac{1-2a}{2}<-a,\end{cases}$ $\varnothing$

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in(-\infty;1)\cup\{5/4\}$.

3-й способ (графический №1 – с применением понятия касательной).

$y=\sqrt{x+1}$ – ветвь параболы; $y=x+a$ – семейство параллельных прямых.

а) – прямая касается графика $y=\sqrt{x+1}$; *б*) – прямая проходит через точку $(-1;0)$.



Единственное решение в следующих случаях: $a<a_{б)}$; $a=a_{а)}$.

Найдем $a_{б)}$, $a_{а)}$.

$a_{а)}$: 1-й способ. Находим касательную с угловым коэффициентом 1 с помощью производной.

$$\left(\sqrt{x+1}\right)'\Big|_{x=x_0}=1;\quad \frac{1}{2\sqrt{x_0+1}}=1;\quad \sqrt{x_0+1}=\frac{1}{2};\quad x_0+1=\frac{1}{4};\quad x_0=-\frac{3}{4}.$$

$$y=\sqrt{x_0+1}+1\cdot\left(x-x_0\right)=x+a_{a)};\quad a_{a)}=\sqrt{x_0+1}-x_0=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}.$$

2-й способ. Воспользуемся определением касательной к параболе как прямой, не параллельной оси параболы и имеющей с ней единственную общую точку.

$$\begin{cases}x=y^2-1\\ y=x+a\end{cases};$$

$$x=x^2+2ax+a^2-1;\quad x^2+x\left(2a-1\right)+a^2-1=0.$$

$$D=\left(2a-1\right)^2-4\left(a^2-1\right)=5-4a;\quad a_{a)}=\frac{5}{4}.$$

$a_{б)}$: $y=x+a_{б)}$ проходит через точку $\left(-1;0\right)$.

$$-1+a_{б)}=0;\ a_{б)}=1.$$

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in\left(-\infty;1\right)\cup\left\{5/4\right\}$.

4-й способ (графический №2 – использующий другие приложения производной).

Выразим параметр a как функцию переменной x:

$a=g\left(x\right)=\sqrt{x+1}-x$. Построим эскиз графика функции g. Далее рассмотрим количество пересечений графика с прямой $y=a$.

Следовательно, в эскизе графика $y=g\left(x\right)$ должны быть отражены следующие моменты: область определения, монотонность, точки экстремума и значения в точках экстремума, а также пределы на бесконечности и в точках разрыва (если они есть).

$$D_g=\left[-1;\infty\right);$$

$g\left(x\right)$ непрерывна на D_g (в точке -1 – непрерывна справа);

$$\lim_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=-\infty;$$

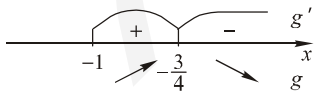
$$g'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}};$$

$$g\left(-1\right)=1.$$

Критические точки:

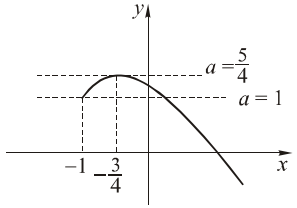
$g'\left(x\right)=0;\quad \sqrt{x+1}=\frac{1}{2};$

$x+1=\frac{1}{4};\quad x=-\frac{3}{4}.$



$x=-\frac{3}{4}$ – точка максимума.

$$g\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{1-\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}.$$



Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in\left(-\infty;1\right)\cup\left\{5/4\right\}$.

5-й способ (замена переменной).

$$\sqrt{x+1}=x+a;\quad t=\sqrt{x+1}\ge 0;\quad t=t^2-1+a;$$

$$t^2-t+a-1=0.\qquad(3)$$

Каждому неотрицательному решению t уравнения (3) соответствует ровно одно решение x исходного уравнения.

Найдем те значения a, при которых уравнение (3) имеет ровно одно неотрицательное решение.

Для разнообразия воспользуемся теоремой Виета (обозначим $\Sigma=t_1+t_2$; $\Pi=t_1\cdot t_2$).

Условию отвечают следующие наборы знаков корней квадратного уравнения (3):

+	−	$(*)$	$\Pi<0$
+	+	$D=0$	$\Sigma>0$
0	0	$D=0$	$\Sigma=0$
−	0	$D>0$	$\Pi=0,\Sigma<0$

Для уравнения (3): $D=1-4\left(a-1\right)=5-4a$,

$$\Sigma=1>0,\quad \Pi=a-1.$$

Получаем условие: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=0\\ \Sigma\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}D>0\\ \Pi<0,\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5-4a=0\\ 1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}5-4a>0\\ a-1<0,\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}a=\frac{5}{4}\\ a<1.\end{array}\right.$

Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in\left(-\infty;1\right)\cup\left\{5/4\right\}$.

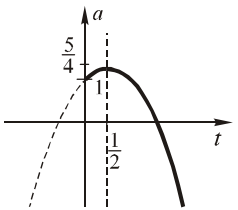
6-й способ (замена переменной).

На наш взгляд, это наиболее простой способ.

$\sqrt{x+1}=x+a;\quad t=\sqrt{x+1}\ge 0;$

$t=t^2-1+a;\quad a=-t^2+t+1.$

$t_0=\frac{1}{2};\ a\left(t_0\right)=1\frac{1}{4};\ a\left(0\right)=1.$



Ответ: уравнение имеет единственное решение при $a\in\left(-\infty;1\right)\cup\left\{5/4\right\}$.

17. ***При каких значениях параметра*** a ***система уравнений*** $\begin{cases} y = 3a\sqrt{x} - 2 \\ a = \dfrac{y+11}{x-9} \end{cases}$ ***имеет единственное решение?***

□ 1-й способ (теорема Виета).

$$\begin{cases} y = 3a\sqrt{x} - 2, & (4) \\ a = \dfrac{y+11}{x-9}, & (5) \end{cases}$$

$y + 11 = a(x-9),\ x \neq 9;\quad y = a(x-9) - 11;\qquad \begin{cases} a(x-9) - 11 = 3a\sqrt{x} - 2 \\ y = 3a\sqrt{x} - 2 \\ x \neq 9. \end{cases}$

Введем новую переменную: $t = \sqrt{x} \geq 0,\ t \neq 3$. $at^2 - 3at - 9a - 9 = 0$. (6)

Заметим, что каждому решению $t \in [0;3) \cup (3;\infty)$ уравнения (6) соответствует ровно одна пара $(x;y)$ решений исходной системы.

Переформулируем задачу: при каких значениях a уравнение (6) имеет одно решение $t \in [0;3) \cup (3;\infty)$?

При $a = 0$ уравнение (6) – линейное, при $a \neq 0$ – квадратное.

$a = 0$: $-9 = 0$ – решений нет.

$a \neq 0$: $at^2 - 3at - 9a - 9 = 0$.

Рассмотрим отдельно случай, когда $t_1 = 3$ – корень:

$$9a - 9a - 9(a+1) = 0;\ a = -1.$$

При $a = -1$ второй корень квадратного уравнения ищем по теореме Виета:

$$\prod = t_1 \cdot t_2 = \frac{-9(a+1)}{a} = 0;\ t_2 = 0.$$

$t_2 = 0$ – единственный корень уравнения (6) из множества $[0;3) \cup (3;\infty)$, т.е. $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a \notin \{0;-1\}$. (7)

Тогда заданию отвечают три набора корней (по знакам). Запишем соответствующие условия, найдем в каждом случае a; совокупность всех полученных ответов даст ответ задачи.

$D = 9a^2 + 4a \cdot 9(a+1) = 9a(a + 4a + 4) = 9a(5a+4)$;

$\prod = t_1 \cdot t_2 = -\dfrac{9(a+1)}{a}$; $\quad \sum = t_1 + t_2 = 3 > 0$; $\quad t_0 = \dfrac{3}{2} > 0$.

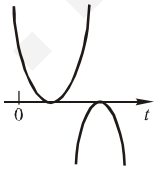
$\begin{cases} D = 0 \\ t_0 \geq 0, \end{cases}$	$\begin{cases} D > 0 \\ \prod < 0, \end{cases}$	$\begin{cases} \prod = 0 \\ \sum < 0, \end{cases}$
$\begin{cases} 9a(5a+4) = 0 \\ \dfrac{3}{2} \geq 0, \end{cases}$ $a \neq 0$	$\begin{cases} 9a(5a+4) > 0 \\ \dfrac{-9(a+1)}{a} < 0, \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{-9(a+1)}{a} = 0 \\ 3 < 0, \end{cases}$
$a = -\dfrac{4}{5}$.	$a \in (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$.	

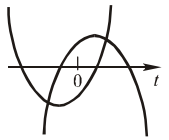
Ответ: при $a \in (-\infty;-1] \cup \left\{-\dfrac{4}{5}\right\} \cup (0;\infty)$ система имеет единственное решение.

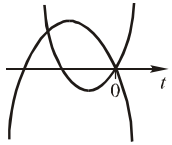
1а способ (теорема о расположении корней квадратного трехчлена).

Различие в решениях способами 1 и 1а начинается с момента (7).

Рассмотрим график квадратичной функции $f(t) = at^2 - 3at - 9(a+1)$. Изобразим те типы парабол, которые отвечают условию.







$\begin{cases} D = 0 \\ t_0 \geq 0, \end{cases}$	$f(0) \cdot a < 0$	$\begin{cases} f(0) = 0 \\ t_0 < 0, \end{cases}$
$\begin{cases} 9a(5a+4) = 0 \\ \dfrac{3}{2} \geq 0; \end{cases}$	$-9a(a+1) < 0,$	$\begin{cases} -9(a+1) = 0 \\ \dfrac{3}{2} < 0, \end{cases}$
$a = -\dfrac{4}{5}$.	$a \in (-\infty;-1) \cup (0;\infty)$.	$\varnothing$

Ответ: при $a \in (-\infty;-1] \cup \left\{-\dfrac{4}{5}\right\} \cup (0;\infty)$ система имеет единственное решение.

2-й способ (графический).

$$\begin{cases} y = 3a\sqrt{x} - 2, \\ a = \dfrac{y+11}{x-9}. \end{cases}$$

Заметим, что если $x \geq 0$ найдено, то по найденному x пара $(x;y)$ определяется однозначно.

ЯГУБОВ.РФ

Выразим параметр a:

$$3a\sqrt{x}-2=a(x-9)-11,\ \ x\neq 9.$$

$$a\left(x-9-3\sqrt{x}\right)=11-2,\qquad a\left(x-3\sqrt{x}-9\right)=9,$$

$9\neq 0$, т.е. по условию $x-3\sqrt{x}-9\neq 0$.

$$a=\frac{9}{x-3\sqrt{x}-9}.$$

Пусть $\sqrt{x}=t,\ t\geq 0,\ t\neq 3$.

$$a(t)=\frac{9}{t^2-3t-9},\ t\geq 0,\ t\neq 3.$$

Построим эскиз графика $a(t)$, найдем при различных значениях a_0 количество пересечений $a=a(t)$ с $a=a_0$. Для этого исследуем $a(t)$ на монотонность и экстремумы, а также непрерывность, и найдем пределы функции в точках разрыва и на границах области определения.

$$D_a:\begin{cases}t^2-3t-9\neq 0\\ t\geq 0, t\neq 3\end{cases}\quad D=9+4\cdot 9=9\cdot 5;\quad t\neq\frac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

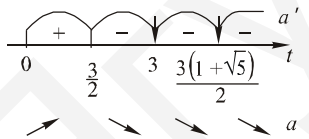
$a(t)$ непрерывна на $[0;3)\cup\left(3;\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\right)\cup\left(\frac{3(1+\sqrt{5})}{2};\infty\right)$;

$t=3$ – точка устранимого разрыва;

$t=\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}$ – точка разрыва II-го рода, так как $\lim\limits_{t\to\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\pm 0}a(t)=\pm\infty$.

$$\lim_{t\to 0}a(t)=-1;\quad \lim_{t\to+\infty}a(t)=0.\qquad a'(t)=-\frac{9(2t-3)}{\left(t^2-3t-9\right)^2},$$

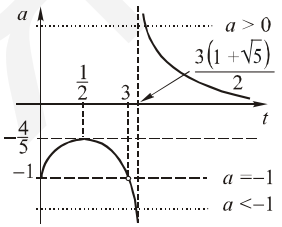
т.е. $t=\frac{3}{2}$ – единственная критическая точка.



$t=\frac{3}{2}$ – точка максимума;

$$a\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-9}=-\frac{4}{5};$$

$$\lim_{t\to 3\pm 0}a(t)=\frac{9}{9-9-9}=-1.$$



Ответ: при $a\in(-\infty;-1]\cup\left\{-\frac{4}{5}\right\}\cup(0;\infty)$ система имеет единственное решение.

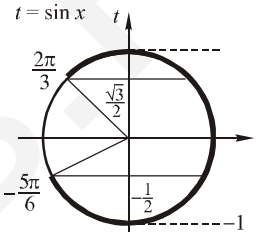
18. ***Найти все значения параметра*** $p\ (p\in R)$***, при которых уравнение*** $8\cos 2x+\frac{p}{\sin x}+19=0$ ***имеет нечетное число решений на отрезке*** $[-5\pi/6;\ 2\pi/3]$.

□ $f(x)=8\cos 2x+\frac{p}{\sin x}+19$ – сложная функция: $f(x)=g(\sin x)$,

где $g(t)=8\left(1-2t^2\right)+(p/t)+19$.

$$\left(g(t)=0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t\cdot g(t)=0\\ t\neq 0,\end{cases}\quad\text{т.е.}\quad\begin{cases}8t\left(1-2t^2\right)+p+19t=0\\ t\neq 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-16t^3+27t+p=0\\ t\neq 0,\end{cases}\qquad\begin{cases}p=16t^3-27t\\ t\neq 0.\end{cases}\qquad(8)$$



В задаче спрашивается о количестве решений исходного уравнения на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$. Зафиксируем связь между количеством решений (x) исходного уравнения на заданном отрезке и количеством решений (t) системы (8):

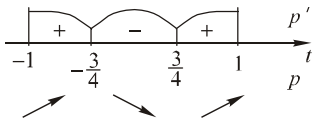
$t\in\{-1;1\}\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⟿ одно решение $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$;

$t\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ ⟿ два решения $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$.

Теперь выясним, при каких значениях p сколько решений (и каких!) имеет система (8). Для этого исследуем функцию $p(t)=16t^3-27t$ на отрезке $[-1;1]$. При этом важно знать: промежутки монотонности, значения в точках экстремума, на концах отрезка и в точках $-1/2$, $\sqrt{3}/2$ и 0 (так как $t\neq 0$ по условию). Заметим, что $p(t)$ – нечетная функция.

$$p(-1)=-16+27=11;\quad p(1)=-11;\quad p\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{16}{8}+\frac{27}{2}=-2+13{,}5=11{,}5;$$

$$p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}-27\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}-13{,}5\cdot\sqrt{3}=-7{,}5\cdot\sqrt{3}=-\frac{15\sqrt{3}}{2}.$$



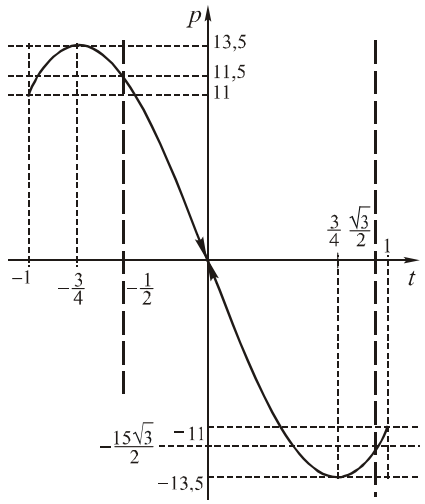
$$p'(t)=\left(16t^3-27t\right)'=$$

$$=3\cdot 16t^2-27=3\left(16t^2-9\right);$$

критические точки: $t=\pm\frac{3}{4}$.

$$p\left(\frac{3}{4}\right)=16\cdot\frac{27}{64}-27\cdot\frac{3}{4}=$$

$$=-\frac{54}{4}=-13{,}5;\quad p\left(-\frac{3}{4}\right)=13{,}5.$$



Мысленно перемещаем прямую $p=p_0$ от $-\infty$ к $+\infty$, отслеживаем количество решений уравнения (8) и количество соответствующих решений (x) исходного уравнения на данном отрезке (правая колонка).

$p\in(-\infty;-13{,}5)\cup(13{,}5;\infty)$	0
$p=-13{,}5$	1
$p\in\left(-13{,}5;-\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)$	1+1=2
$p\in\left[-\frac{15\sqrt{3}}{2};-11\right)$	1+2=3
$p=-11$	1+1=2
$p\in(-11;0)\cup(0;11)$	1
$p=11$	1+1=2
$p\in(11;11{,}5)$	2+1=3
$p\in[11{,}5;13{,}5)$	2+2=4
$p=13{,}5$	2

} решений.

Ответ: уравнение имеет нечетное количество решений на данном отрезке при $p\in\{-13{,}5\}\cup\left[-15\sqrt{3}/2;-11\right)\cup(-11;0)\cup(0;11)\cup(11;11{,}5)$.

Агубов.рф