

LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

Первый день

11 класс

1. Можно ли представить число 2016 в виде суммы кубов:

- а) трех натуральных чисел;
- б) четырех натуральных чисел?

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и CA в точках N, P, K соответственно. Отрезок BK вторично пересекает вписанную окружность в точке L . Определим точки $T = AL \cap NK$, $Q = CL \cap KP$. Докажите, что прямые BK, NQ и PT пересекаются в одной точке.

3. Существует ли функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любых действительных чисел x, y выполняется неравенство:

$$f(x - f(y)) \leq x - yf(x)?$$

4. Назовем квадрат $n \times n$, разбитый на прямоугольники меньшего размера, *прочным*, если не существует прямой, которая разделяет квадрат на две части и при этом не пересекает ни один маленький прямоугольник во внутренних точках. Так на рис. 1 изображен прочный квадрат 4×4 , а на рис. 2 – нет. Для произвольного заданного натурального m , выясните, для каких натуральных n можно разбить квадрат $n \times n$ на прямоугольники $m \times 1$ и $1 \times m$ так, чтобы этот квадрат был прочным.

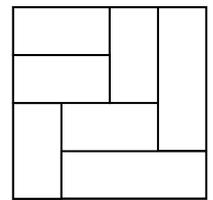


Рис. 1

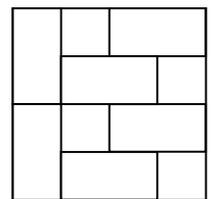


Рис. 2

Запорожье, 22 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

LVI Всеукраинская олимпиада юных математиков 2016

Второй день

11 класс

5. Решите уравнение $x[x] = 2016$.

Тут через $[x]$ обозначена целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

6. Государство Платон имеет форму выпуклого многоугольника в вершинах которого расположены пограничные вышки. Дальнобойщику нужно проехать через все вышки, при этом за каждый километр он платит один пуйлик (валюта державы) мошенникам из правительства (маршрут не обязательно должен быть замкнутым, единственное условие – побывать на каждой вышке, ехать можно в любом направлении, не выходя за границы государства). Периметр государства равен 3000 км, а диаметр 1000 км. Сколько пуйликов гарантировано должен уплатить дальнобойщик мошенникам?

Диаметром многоугольника называется расстояние между двумя точками на его границе, которые находятся на наибольшем расстоянии.

7. Задан треугольник ABC . Окружность w с центром в точке Q касается стороны BC , а также касается внутренним образом описанной окружности $\triangle ABC$ в точке A . Пусть M – середина стороны BC , а N – середина дуги BAC описанной окружности $\triangle ABC$. На отрезке BC выбрана такая точка S , что $\angle BAM = \angle SAC$. Доказать, что точки N , Q и S лежат на одной прямой.

8. Пусть $P(n)$ и $Q(n)$ два многочлена, отличные от констант, с целыми неотрицательными коэффициентами. Для $n \geq 1$ определим последовательность: $x_n = 2016^{P(n)} + Q(n)$. Докажите, что существует бесконечно много простых p для которых найдется такое натуральное число m , которое не делится на квадрат ни одного простого числа, и для которого выполняется условие $x_m \div p$.

Запорожье, 23 марта 2016 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов