

LI Всеукраїнська олімпіада, 2011

11 клас. I тур

1. Розв'язати рівняння:

$$\cos \pi x = \left[\frac{x}{2} - \left[\frac{x}{2} \right] - \frac{1}{2} \right].$$

Тут через $[a]$ позначено цілу частину числа a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a .

2. Правильний трикутник зі стороною 7 паралельними прямими поділено на 49 маленьких правильних одиничних трикутників. Із нього вирізають уздовж ліній сітки паралелограми, одна сторона яких дорівнює 1, а друга дорівнює 2. Яку найбільшу кількість таких паралелограмів можна вирізати?

3. Натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову:

$$0 < |ad - bc| < \min\{c; d\}.$$

Нехай x, y – взаємно прості натуральні числа, більші від 1. Доведіть, що число $x^a + y^b$ не ділиться на число $x^c + y^d$.

4. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . На бічній стороні CD довільно відмітили точку F . E – точка перетину прямих AF і BD . На бічній стороні AB відмітили точку G так, що $EG \parallel AD$. Позначимо через H точку перетину прямих CG і BD , через I – точку перетину прямих FH і AB . Доведіть, що прямі CI , FG і AD перетинаються в одній точці.

ЛІ Всеукраїнська олімпіада, 2011

11 клас. ІІ тур

5. Коло проходить через вершини A та B трикутника ABC , дотикається сторони BC у точці B і вдруге перетинає сторону AC у точці E . Друге коло проходить через вершини A та C , дотикається сторони BC у точці C і вдруге перетинає сторону AB у точці D . Відрізки BE і CD перетинаються у точці F . Довести, що $\triangle BCF$ – рівнобедрений.

6. Доведіть, що для будь-якого набору чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$, де $a_{2011} \neq 0$, існує функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої при усіх дійсних x

$$a_1 f(x) + a_2 f(f(x)) + \dots + a_{2011} \underbrace{f(f(f \dots f(x) \dots))}_{2011} = x.$$

7. Доведіть, що для довільних дійсних a, b, c , менших від 1 і таких, що

$$2(a + b + c) + 4abc = 3(ab + bc + ca) + 1,$$

виконується нерівність $a + b + c \leq \frac{3}{4}$.

8. У ящику лежать іграшкові котики. У кожного котика голова пофарбована в один з 2011 кольорів, і хвіст також пофарбований в один з цих 2011 кольорів – можливо, у такий самий, а можливо, в інший. З ящика можна вибрати деяких котиків і скласти з них окремий набір. Набір вважається правильним, якщо він складається рівно з 2011 котиків, серед яких немає двох котиків з головами одного кольору і немає двох котиків з хвостами одного кольору. Відомо, що з ящика можна вибрати правильний набір більше, ніж в один спосіб. Довести, що у ящику можна залишити декількох котиків (можливо, всіх) таким чином, щоб вибрати правильний набір з цього ящика можна було рівно в два способи.