

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

11 клас

Перший день

11.1. При яких значеннях параметра α рівняння $|x - \frac{1}{2}| + |x - \sin \alpha| = \cos 3\alpha$ має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

11.2. Знайдіть усі функції $f: R \rightarrow R$, такі що для будь-яких дійсних x та y виконується умова:

$$f(f(y) + 2 + x) + f(f(y) - x) = yf(y)(x + 1).$$

11.3. Дано трикутник ABC всередині якого існує така точка O , що $\angle BOC = 90^\circ$ та $\angle BAO = \angle BCO$. Точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що кут $\angle OMN$ — прямий.

11.4. Знайти кількість розв'язків у натуральних числах рівняння

$$[a^2, b^2] + [b^2, c^2] + [c^2, a^2] = (a^2, b^2)(b^2, c^2)(c^2, a^2),$$

де через $[m, n]$ та (m, n) позначені, відповідно, НСК та НСД натуральних чисел m та n

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2008

11 клас

Другий день

11.5. Послідовність $\{f_n\}$ задається наступним чином: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ для довільного натурального n . Яка найбільша кількість членів послідовності $\{f_n\}$ може бути серед послідовних членів зростаючої арифметичної прогресії?

11.6. У країні є n міст. Компанія монополіст хоче установити повітряне сполучення між деякими містами. Уряд вимагає, щоб повітряне сполучення між містами задовольняло таким умовам: щоб з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого за один або декілька перельотів, а також з кожного міста виходила однакова кількість рейсів. Зауважимо, що рейсом між містами A та B вважають сукупність двох перельотів — з міста A в B та з міста B в A , а також між двома містами може існувати щонайбільше один рейс. Але компанія хоче зробити так, щоб можна було закрити якомога меншу кількість рейсів, і вже не з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого. Яку найменшу кількість рейсів треба буде закрити компанії, якщо:

a) $n = 2008$;

б) $n = 2007$?

11.7. Доведіть, що для довільних невід'ємних дійсних чисел x, y, z , таких що $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, має місце нерівність
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y + z}} + \frac{y}{\sqrt{x + y^2 + z}} + \frac{z}{\sqrt{x + y + z^2}} \leq \sqrt{3}.$$

11.8. В гострокутному трикутнику ABC точки A_0, B_0, C_0 — основи висот. Всередині трикутника відмічені такі точки A_1, B_1, C_1 , що $\angle A_1BC = \angle A_1AB$, $\angle A_1CB = \angle A_1AC$, $\angle B_1CA = \angle B_1BC$, $\angle B_1AC = \angle B_1BA$, $\angle C_1BA = \angle C_1CB$, $\angle C_1AB = \angle C_1CA$. Точки A_2, B_2 та C_2 — середини відрізків AA_1, BB_1 та CC_1 відповідно. Доведіть, що прямі A_0A_2, B_0B_2 та C_0C_2 перетинаються в одній точці.