XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

10 клас

Перший день

10.1. При яких дійсних значеннях параметра a нерівність

$$\left(ax^2+4(a+1)x+4a+1\right)\left((4a+1)x^2+4(a+1)x+a\right)\geq 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

10.2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1. На променях BB_1 і CC_1 за точками B_1 і C_1 вибираються точки P і Q відповідно так, що $\angle APC=\angle AQB=90°$. Радіуси кіл, які вписані в трикутники APC та AQB, рівні. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

10.3. На клітчастій дошці розміром $n\times n$ двоє гравців по черзі малюють многокутники (не обов'язково опуклі) одиничної площі з вершинами у вузлах сітки. Забороняється малювати многокутник, який має спільні точки з вже намальованими. Програє той, хто не може намалювати черговий многокутник. Хто виграє у цій грі?

10.4. Знайдіть усі функції $f:X\to R$, які для будь-яких чисел $x,y\in X$ задовольняють рівняння:

$$f(x+y)+f(xy-1)=\left(f(x)+1\right)\left(f(y)+1\right),$$

якщо множина X є множиною:

а) цілих чисел;

б) раціональних чисел.

XLVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 2007

10 клас

Другий день

10.5. Розв'яжіть нерівність:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+\frac{x^2+1}{x}\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\geq 0.$$

10.6. У країні Карнавалії 669 міст, деякі з яких з'єднані дорогами з одностороннім рухом. Кожний день у довільних двох містах проводять карнавал, на час якого всі дороги, що входять і виходять з цих міст, перекриваються. Але схема доріг в Карнавалії влаштована так, що мешканці інших 667 міст можуть проїхати з будь-якого одного міста в будь-яке інше скориставшись однією або декількома дорогами, не порушуючи правил руху. Яка найменша кількість доріг може бути в Карнавалії?

10.7. В гострокутному трикутнику ABC кут ABC дорівнює $60°$. Точка D належить стороні AC. Доведіть нерівність:

$$\sqrt{3}BD\leq AC+\max\{AD,DC\}.$$

10.8. Доведіть, що для довільних різних простих чисел p і q рівняння

$$x(x+1)=pq(x-y)$$

а) має рівно два розв'язки в натуральних числах (x, y);

б) в обох розв'язках значення y однакове.