

ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

12 березня 2019 р. 9 клас. 1 тур

1. Задане натуральне число $n > 1$. По колу розставлені 2019 натуральних чисел. Відомо, що добуток будь-яких двох сусідніх з них є точним n -м степенем деякого натурального числа. Чи обов'язково й добуток будь-яких двох (не обов'язково сусідніх) з цих чисел також є точним n -м степенем натурального числа?

2. Нехай точка M – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC . Серединний перпендикуляр до гіпотенузи AB перетинає катет BC у точці K . Перпендикуляр, що проведений до прямої CM із точки K , перетинає продовження відрізка AC за точку A в точці P . Прямі CM і BP перетинаються в точці T . Доведіть, що $AC = TB$.

3. В компанії людей немає трьох попарно знайомих між собою, а серед будь-яких п'яти знайдуться троє, які мають спільного знайомого. Доведіть, що людей можна розбити на дві групи попарно незнайомих людей.

4. На дошці записаний многочлен $x^2 + 1$. Кожного дня Катя витирає записаний на дошці многочлен $F(x)$ та записує замість нього один з двох многочленів: $F^2(x) + 1$ або $F(x^2 + 1)$. Доведіть, що через рік вільний член многочлена, що записаний на дошці, буде більше, ніж $2^{2^{222}}$.

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

13 березня 2019 р. 9 клас. 2 тур

5. На дошці записані натуральні числа $a < b$. На кожному кроці два записані на дошці числа витирають, а замість них записують їх суму та модуль різниці. В деякий момент на дошці з'явилося записаним число 2019. При якому найменшому можливому b це можливо?

6. Доведіть, що для довільних дійсних x, y, z справджується нерівність:

$$x^2 (3y^2 + 3z^2 - 2yz) \geq yz (2xy + 2xz - yz).$$

Для яких трійок може досягатися рівність?

7. Задані натуральні числа a, b, c . Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k , для якого $\text{НСД}(a^k + bc, b^k + ac, c^k + ab) > 1$.

8. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло ω з центром у точці O . Продовження його висот, що проведені з вершин A та C , вдруге перетинають ω в точках A_0 та C_0 відповідно. Пряма A_0C_0 перетинає сторони AB та BC у точках A_1 та C_1 відповідно. Точки A_2 та C_2 на стороні AC такі, що $A_2O \parallel BC$, а $C_2O \parallel AB$. Нехай H – ортоцентр $\triangle ABC$, T – точка перетину A_1A_2 і C_1C_2 . Доведіть, що $HT \parallel AC$.