LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

12 березня 2019 р. 8 клас. 1 тур

1. По колу розставлені декілька натуральних чисел. Відомо, що добуток будь-яких двох сусідніх з них є точним квадратом натурального числа. Доведіть, що добуток будь-яких двох з розставлених чисел також є точним квадратом натурального числа.

2. Богдан для деякого прямокутника Q провів 2017 вертикальних та 2018 горизонтальних прямих, якими розрізав прямокутник Q на 2018×2019 менших не обов'язково однакових прямокутників. Андрій каже, що йому треба знати периметри 2019 менших прямокутників, на які він вкаже, щоб дізнатися периметр усього прямокутника Q. А Олеся сказала, що їй треба знати периметри 4036 менших прямокутників, на які вона вкаже, щоб дізнатися периметр усього прямокутника Q. Хто з дітей правий?

3. В компанії людей немає трьох попарно знайомих між собою, а серед будь-яких п'яти знайдуться троє, які мають спільного знайомого. Доведіть, що людей можна розбити на дві групи попарно незнайомих людей.

4. Для довільного натурального $n \geqslant 3$ знайдіть деякі цілі числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_2}{a_n}.$$

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

13 березня 2019 р. 8 клас. 2 тур

5. Відомо, що ненульові дійсні числа x, y, z задовольняють умову $xy+yz+xz=0$. Чому може дорівнювати значення виразу $\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2xz}+\dfrac{1}{z^2+2xy}$?

6. У кожного з гравців – Андрія та Олесі – є набір з 2019 карток, на яких записані числа 1, 2,..., 2019 (кожне число рівно один раз у кожного з гравців). Гра відбувається за такими правилами. На початку гри на столі лежить деяка картка з числом $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$. Після цього гравці по черзі (розпочинає Андрій) міняють одну із своїх карток на ту, що лежить на даний момент на столі. При цьому Андрій може міняти картку на столі на ту свою, на якій записане число більше, ніж число, що записане на картці на столі, а Олеся – на свою картку з меншим записаним числом ніж на картці на столі. Той, хто не може зробити хід, вважається тим, хто програв. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне до перемоги?

7. Дано трикутник ABC. На сторонах AB, BC та AC вибрали точки C_1, A_1 та B_1 відповідно. Нехай K – проекція B_1 на пряму A_1C_1. На променях B_1A та B_1C вибрали точки M та N відповідно так, що $\angle B_1A_1C_1 = 2\angle KNB_1$ та $\angle B_1C_1A_1 = 2\angle KMB_1$. Доведіть, що довжина відрізку MN не більша за периметр трикутника $A_1B_1C_1$.

8. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого НСД$(a^k+bc, b^k+ac, c^k+ab) > 1$.