7 класс

Второй тур

(указания для жюри)

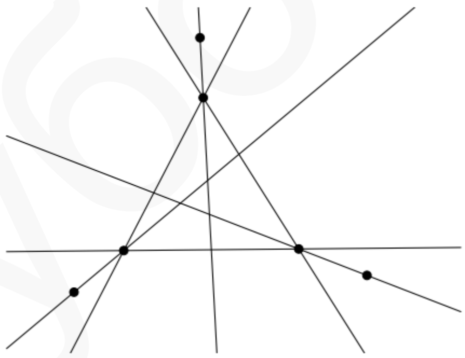
1. Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки A (где они сейчас находятся) в точку B, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин и может унести 5 г груза, а Тонкий – со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку B, если они начинают двигаться одновременно? Ответ обоснуйте. (Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.)

Ответ: Толстый доставит груз первым.

Указание: Толстый муравей может переносить пять грамм груза. Значит, ему необходимо сделать $150/5 = 30$ переходов из A в B. Кроме того, ему нужно будет $30 - 1 = 29$ раз возвращаться из B в A (после того, как Толстый отнесёт последнюю часть груза из A в B, ему уже не нужно будет возвращаться). На один переход Толстый тратит $150/3 = 50$ минут. Итого он потратит $50 \cdot 59 = 2950$ минут. Аналогично, Тонкому нужно сделать 99 переходов, и на каждый он потратит 30 минут. Итого, Тонкий потратит $30 \cdot 99 = 2970 > 2950$ минут.

2. Отметьте на плоскости 6 точек и проведите 6 прямых так, чтобы на каждой прямой было по две отмеченные точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки.

Указание: Пример расположения точек и прямых, удовлетворяющих условию, приведен на картинке:



3. Шериф Джек считает, что если он поймал в некоторый день простое число бандитов, то ему повезло. В понедельник и вторник Джеку везло, а начиная со среды число пойманных им бандитов было равно сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего числа. Какое максимальное число дней подряд Джеку могло везти? Ответ обоснуйте.

Ответ: Пять дней.

Указание: Обозначим через p_1 количество пойманных Джеком бандитов в понедельник, через p_2 – во вторник и т. д. Из условия следует, что числа p_1 и p_2 – простые и $p_{k+2} = 2p_{k+1} + p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Если $p_k \equiv p_{k+1} \pmod 3$, то p_{k+2} делится на 3. Т. к. $p_{k+2} > 3$, то это число не может быть простым. Перебирая все возможные различные остатки p_1 и p_2 при делении на три, получаем, что Джеку могло везти не больше пяти дней подряд, начиная с понедельника. Пример для пяти дней: 7, 3, 13, 29, 71.

4. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

Указание: В каждом из матчей побеждает либо старший, либо младший из двух. Поскольку всего матчей сыграно 310, то либо найдётся 155 матчей, где победил более молодой участник, либо 155 матчей, где победил более старый. Без ограничения общности можем считать, что есть 155 матчей, где победил более молодой. Самый старший из участников в таком матче победить не мог, а из 77 остальных по принципу Дирихле ($77 \cdot 2 = 154 < 155$) найдётся такой, который победил в таких матчах трижды.