

Завдання
III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади
з математики
2013-2014 навчальний рік
7 клас

1. Розв'язати у цілих числах рівняння

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$

2. Чи можна відвезти камені вагою 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 466 кг, 468 кг сімома вантажівками, кожна з яких може перевозити не більш як три тонни?
3. У ряд розташовано 30 клітин. На самій правій стоїть біла фішка, на самій лівій - чорна. Кожен з двох граючих пересуває свою фішку на одну або дві клітини вперед або назад. Пропускати хід не можна, перестрибувати чужу фішку теж. Програє той у кого немає можливості ходу. Хто виграє при правильній грі - початківець або його партнер?
4. На фабриці є два крана. З першого тече вода, з другого - концентрат. Як використовуючи дві каструлі ємністю 3 і 5 літрів відміряти рівно один літр 40% розчину концентрату. Зауваження. Можна тільки переливати і виливати рідину з кастрюль.

За кожне правильно виконане завдання можна отримати 7 балів.

Задание
III этапа Всеукраинской ученической олимпиады
по математике
2013-2014 учебный год
7 класс

1. Решить в целых числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$

2. Можно ли увезти камни весом 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 466 кг, 468 кг на семи трехтонных грузовиках?
3. В ряд расположено 30 клеток. На самой правой стоит белая фишка, на самой левой – черная. Каждый из двух играющих передвигает свою фишку на одну или две клетки вперед или назад. Пропускать ход нельзя, перепрыгивать чужую фишку тоже. Проигрывает тот у кого нет возможности хода. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер?
4. На фабрике имеются два крана. Из первого течет вода, из второго – концентрат. Как используя две кастрюли ёмкостью 3 и 5 литров отмерить ровно один литр 40% раствора концентрата. Замечание. Можно только переливать и выливать жидкость из кастрюль.

За каждое правильно выполненное задание можно получить 7 баллов.

Задание
III этапа Всеукраинской ученической олимпиады
по математике
2013-2014 учебный год
7 класс

РЕШЕНИЕ

1. Решить в целых числах уравнение

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Поскольку $\left| \frac{1}{y + \frac{1}{z}} \right| < 1$, $x = 1$ или $x = 2$. Если $x = 1$, то $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, поэтому $y = 2$ или $y = 3$. Отсюда, $y = 2, z = 3, x = 1$. Если $x = 2$, то $y + \frac{1}{z} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$, поэтому $y = -1$ или $y = -2$. Отсюда, $y = -2, z = 4, x = 2$.

2. Можно ли увезти камни весом 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 466 кг, 468 кг на семи трехтонных грузовиках?

Нельзя. Так как всего камней 50 и $50 = 7 \cdot 7 + 1$. Таким образом, на хотя бы один грузовик нужно будет погрузить не менее 8 камней, но вес восьми самых легких камней равен $370 + 372 + \dots + 384 = 3016 > 3$ т.

3. В ряд расположено 30 клеток. На самой правой стоит белая фишка, на самой левой – черная. Каждый из двух играющих передвигает свою фишку на одну или две клетки вперед или назад. Пропускать ход нельзя, перепрыгивать чужую фишку тоже. Проигрывает тот у кого нет возможности хода. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер?

Выигрывает начинающий. При первом ходе он должен передвинуть фишку на одну клетку, а затем ходить так, чтобы количество клеток между белой и черной фишками после его хода было кратно 3.

4. На фабрике имеются два крана. Из первого течет вода, из второго – концентрат. Как используя две кастрюли ёмкостью 3 и 5 литров отмерить ровно один литр 40% раствора концентрата. Замечание. Можно только переливать и выливать жидкость из кастрюль.

Сначала отмерим один литр концентрата в 5 л кастрюле, для этого напомним полностью концентратом 3 л кастрюлю и перельем в 5 л, еще раз нальём полностью 3 л кастрюлю концентратом и опять перельем в 5 л. Тогда в 3 л кастрюле останется 1 л концентрата. Опустошим 5л кастрюлю и перельем туда 1л концентрата. Далее, напомним 3 л кастрюлю водой и перельем в 5л кастрюлю, в которой уже есть 1л концентрата. После опять напомним 3 л кастрюлю концентратом и перельем его 5л кастрюлю доверху. Тогда в 3 л кастрюле останется 2 литра концентрата, а в 5л кастрюле будет 1л концентрата + 3 л воды + 1л концентрата, то есть 5 литров 40% раствора. Наполняем 3 л кастрюлю доверху из 5 л кастрюли, тогда в 5л кастрюле будет 4 литра раствора. Опустошаем 3 л кастрюлю и опять наполняем её из 5л, тогда в 5л кастрюле останется ровно 1л раствора.