

Розв'язання завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у місті Києві 2015-2016 рік

Логіка може привести вас
від пункту «А» до пункту «Б»,
а уява – куди завгодно».
Альберт Ейнштейн

6 клас

1. На першому курсі факультету кібернетики навчаються 40% дівчат та 60% юнаків. Відомо, що 20% юнаків не люблять математичний аналіз, а дівчата усі його люблять. Яке відношення кількості дівчат до юнаків, хто любить математичний аналіз?

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

Розв'язання. Нехай юнаків на першому курсі $6x$, тоді дівчат – $4x$. Хлопців, що не люблять математичний аналіз $\frac{1}{5} \cdot 6x = \frac{6x}{5}$, а тих, що люблять – $\frac{24x}{5}$. Таким чином шукане відношення дорівнює $\frac{4x}{\frac{24x}{5}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$.

2. Попарно різні точки A, B, C, D розташовані на прямій таким чином, що виконуються умови: $AB > AC > AD$ та $BC > BD > CD$. Скількома різними способами зліва направо можуть бути розташовані ці точки? Варіанти $ABCD$ та $DCBA$ вважаються різними.

Відповідь: 4 варіанти.

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли точка A розташована ліворуч від B . За умовою тепер точка C розташована ближче до A , ніж точка B . Вона може бути розташована праворуч від A (положення C_1) або ліворуч (положення C_2) (рис. 1). Точка D має бути ближче до A ніж C , тобто для неї є два варіанти D_1 та D_2 . Подивимось, які з них не призводять до суперечності.

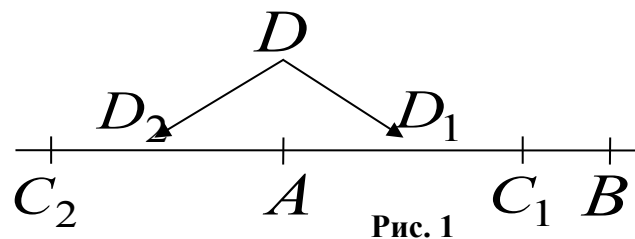
C_1 та D_1 - суперечить $BC > BD$.

C_1 та D_2 - суперечить $BC > BD$.

C_2 та D_1 - такий варіант можливий.

C_2 та D_2 - такий варіант можливий.

Таким чином можливі два варіанти $CADB$ та $CDAB$. Зрозуміло, що можливі й два аналогічні варіанти, коли точка A розташована праворуч від B , тобто $BDAC$ та $BADC$. Разом – 4 варіанти.



3. Знайдіть найменше семицифрове число, яке ділиться націло на 9 та має усі різні цифри.

Відповідь: 1023489.

Розв'язання. Очевидно, що треба щоб перші цифри були якомога меншими. Початок 102345 не можливий, бо для подільності на 9 повинен закінчитись на цифру 3. Далі просто перебираємо можливі варіанти: 102346 та 2, 102347 та 1, 102348 та 0 або

9, тому шукане число: 1023489.

4. Назвемо множину чисел, які вибрані з сукупності $\{1; 2; \dots; 50\}$ *троїстою*, якщо вона не містить двох елементів, один з яких утричі більший за інший. Скільки максимум може містити елементів тріста множина чисел?

Відповідь: 38 елементів.

Розв'язання. Зрозуміло, що найбільша за кількістю елементів тріста множина містить усі елементи з множини $\{17; 18; \dots; 50\}$, які не кратні 3. Для них не існує можливих елементів, що утричі більші чи менші за них. Таких елементів 23. Інші елементи розіб'ємо на такі групи:

перша група – $\{1; 3; 9; 27\}$;

друга група – $\{2; 6; 18\}$, $\{4; 12; 36\}$, $\{5; 15; 45\}$;

третья група – $\{7; 21\}$, $\{8; 24\}$, $\{10; 30\}$, $\{11; 33\}$, $\{13; 39\}$, $\{14; 42\}$, $\{16; 48\}$.

У максимальну трісту множину слід взяти 2 елементи з множини першої групи, що не порушують умови, по 2 елементи з кожної множини другої групи (найбільший та найменший) та по одному елементу з множин третьої групи. Разом матимемо 38 елементів.