

Д. В. Алексеев, О. П. Виноградов, г. Москва

В марте и апреле 2010 года проводились экзамены для поступающих в СУНЦ МГУ. В данной статье приводятся условия задач, предлагавшихся на экзамене. Решения задач будут опубликованы в брошюре, которая готовится в настоящее время к публикации в издательстве СУНЦ МГУ ([www.pms.ru](http://www.pms.ru)).

**Московский письменный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1**

1. Найти натуральное  $n$  больше единицы, если известно, что числа 573, 714 и 902 дают одинаковые остатки при делении на  $n$ .

2. Пусть  $a$  и  $b$  — корни уравнения  $x^2 + x - 4 = 0$ . Известно, что число

$$(1 + 3b + 7b^2)a^3 + 7b^3a^2 + 3b^3a + b^3$$

— целое. Найти это число.

3. Пусть числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq -5 \\ x + 3y \geq -5 \end{cases}$$

Какое наибольшее значение может принять  $x$ ?

4. Вне прямой  $L$  по одну сторону от нее взяты две точки  $B$  и  $D$ . Точка  $B$  является вершиной равностороннего треугольника  $ABC$ , основание которого лежит на прямой  $L$ . Известно, что  $\angle ADC = 105^\circ$ ,  $BC = 4$ . Прямые  $AD$  и  $CD$  пересекают окружность, описанную вокруг треугольника  $ABC$ , в точках  $P$  и  $Q$ . Найти длину отрезка  $PQ$ .

5. На плоскости  $Oxy$  отметить все точки, через которые не проходит ни одна из парабол  $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$ , где  $p$  — любое действительное число.

**Московский письменный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1**

1. Найти площадь фигуры на плоскости  $Oxy$ , которая состоит из точек с координатами  $(x, y)$ , удовлетворяющими неравенству  $|x| \leq 3 + \sqrt{6|y| - y^2}$ .

2. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC = 3$  и  $AD = 4$  на продолжении основания  $BC$  за точку  $C$  выбрана точка  $E$ , так, что прямая  $AE$  делит трапецию на две равновеликие (т.е. имеющие одинаковую площадь) части. Найти длину отрезка  $CE$ .

3. На плоскости взяты две точки  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  в этой плоскости проведены 20 прямых, а через точку  $B$  в этой же плоскости — 11 прямых. Известно, что любые две из этих прямых пересекаются в одной точке, и среди них нет прямой, проходящей одновременно как через точку  $A$ , так и через точку  $B$ . Сколько различных треугольников образуется при пересечении всех этих прямых?

4. Восьмая степень целого числа  $n$  записывается 9-ю цифрами 1, 2, 4, 6, 6, 8, 9, 9, 9, расположенными в некотором порядке. Найти число  $n$ .

5. Для всех  $n \geq 1$  все члены последовательности  $\{a_n\}$  удовлетворяют условию  $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$ . Известно, что  $a_1 = 2$  и произведение  $a_{41} a_{42} \dots a_{80} = 1$ . Найти  $a_2$ .

**Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Продолжительность 90 минут. Вариант 1.**

Для задач 1-4 напишите ответ.

1. Какому числу равно выражение

$$\frac{5}{4}a^2 - 3(a-b)(a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{14b^2 - 5a^2}{4},$$

если  $a = 46/15$ ,  $b = 7,5$ .

2. На какое наименьшее натуральное число нужно разделить произведение  $(4!) \times (5!) \times \dots \times (10!) \times (11!) \times (12!)$ , чтобы частное было квадратом некоторого натурального числа? ( $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ ).

3. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 8x + 16} \leq 101?$$

4. Числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5, полученные в результате измерения одной диагонали и четырех сторон выпуклого четырехугольника, расположены в порядке возрастания. Чему равна длина диагонали?

**Для задач 5-7 напишите решение.**

5. Числа  $a_1, a_2, a_3$  являются последовательными членами арифметической прогрессии, числа  $b_1, b_2, b_3$  являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что  $a_1 + a_2 + a_3 = 126$ ,  $a_1 + b_1 = 85$ ,  $a_2 + b_2 = 76$ ,  $a_3 + b_3 = 84$ . Найти члены обеих прогрессий.

6. Длины 2-х сторон параллелограмма относятся друг к другу как 5 : 8, длина меньшей диагонали равна 28. Найти длины сторон параллелограмма, если его один угол больше другого в два раза.

7. Пусть  $x, y, z$  означают различные цифры. Известно, что

$$\overline{xx} \times \overline{yz} \times \overline{xyz} = \overline{xyzxyz}.$$

Чему равно  $x - y + z$ ?

**Московский устный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение.  
Апрель 2010 года. Вариант 1**

1. Саша получил пятерок в 3-ей четверти на 5% меньше, чем во 2-ой четверти, а в 1-ой четверти на 20% больше, чем в 3-ей. На сколько процентов Саша получил пятерок больше в 1-ой четверти, чем во 2-ой четверти?

2. Центр  $O$  окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника, если длина отрезка  $OC$  равна 5.

3. Из чисел 7, 8, 9, ..., 153, 154 выбирают одно число, а затем из оставшихся чисел выбирают еще одно число. Сколько существует так составленных различных пар чисел, у которых второе выбранное число делится на 3?

4. Пусть  $a_n$  является  $n$ -м членом арифметической прогрессии. Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2009} a_{2010}},$$

если  $a_1 = 1$ , а разность прогрессии равна 3.

5. Число  $\sqrt{2000 \times 2001 \times 2002 \times 2003 + 1}$  является целым. Найдите это число.

**Московский устный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение.  
Апрель 2010 года. Вариант 1**

1. Число  $a$  больше числа  $b$  на  $x\%$ , а число  $b$  меньше числа  $a$  на  $(\frac{4}{5}x\%)$ . Найдите  $x$ .

2. Ветви параболы  $y(x) = ax^2 + bx + c$  направлены вниз, а вершина находится в точке  $(1, 1)$ . Расстояние от начала координат до точки пересечения графика параболы с осью  $OY$  равно 3. Напишите уравнение этой параболы.

3. Внутри треугольника  $ABC$  с основанием  $AC = 30$  см и высотой  $BH = 10$  см расположен равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию, вершина прямого угла лежит на  $AC$ , а вершины острых углов лежат на  $AB$  и  $BC$ . Определите стороны вписанного треугольника.

4. Сколько существует натуральных трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, у которых любые две цифры отличаются друг от друга не меньше чем в два раза, а сумма цифр больше 10?

5. Найдите все  $a > 1/2$ , для которых интервал  $(4a + 1; 6a)$  содержит внутри себя ровно одну целую точку.

Работа О. П. Виноградова выполнена при содействии РГНФ, грант №08-06-00144а.