

VII. Логарифмические уравнения и неравенства.

Решите уравнение:

1. $\log_4(x+2) = 0.5$;
2. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 12) = -2$;
3. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}((x^2+x)(x^2+5x+6)-19+2\sqrt{6}) = 2$;
4. $\log_2 \log_3 \lg x = 0.5$;
5. $\log_{3x+2} 16 = 4$;
6. $\log_5 \log_{0.5}(\log_{\sqrt{-x}}(2x^2 - x - 6) - 1.5) = 0$;
7. $(x^2 - 4) \cdot \log_3(x+1) = 0$;
8. $\log_{0.2}(-2 - 3x) = \log_{0.2}(x^2 - 2)$;
9. $\lg(x+2)(x-3) = \lg \frac{x+2}{x-3}$;
10. $\ln^2(2x+3) = \ln^2(3x+2)$;
11. $\log_{0.1}^{10}(x^2 - 7x) - \log_{0.1}^{10} \frac{9(x-7)}{x} = 0$;
12. $\log_2(3-x) = 3 - \log_2(1-x)$;
13. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(7-2x)$;
14. $\log_3 x + \log_3(x-2) = \log_3(9-2x)$;
15. $\lg(5-3x) + \lg(3x-1) = \lg(5-x) + \lg(x-1)$;
16. $\ln(1-x)^4 = 4$;
17. $\log_2 x^4 + 4\log_2(-x) = 8$;
18. $\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$;
19. $\lg(x^3-1) - 0.5\lg(x^2-2x+1) = \lg 13$;
20. $11\log_5(x-18) + \log_5(x+6)^{11} - 10\log_5((x-18)(x+6)) = 2$;
21. $2\log_3 \frac{x-3}{x-7} + 1 = \log_3 \frac{x-3}{x-1}$;
22. $\lg^2 x^2 - \lg x^3 = \lg 10$;
23. $\log_2^2(x+1)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)^7 = 2$;
24. $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$;
26. $\log_{x^3+x}(x^2-4) = \log_{4x^2-6}(x^2-4)$;
27. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
28. $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$;
29. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$;
30. $9^{\log_9(x-4)} = 3$;
31. $4^{\log_{0.25}(2x^2+4x+3)} = 36^{\log_{\frac{1}{6}}(x+2)}$;
32. $x^{\lg x} = \frac{100}{x}$;
33. $x^{1+\lg \frac{x}{2}} = 400$;
34. $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$;
35. $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x^2} = 6$;
36. $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$;
37. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$;
38. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$;
39. $20\log_{4x} \sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$;
40. $9 \cdot 3^{\log_x^2 4} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x 0.125} = 0$;
41. $\lg(4^x - x + 2) = x \lg 40 - x$;
42. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} - 1 = \lg x$;
43. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{8(\log_4 x - 1)}$;
44. $x^{2\log_9 8} - x^{\log_x 30} + x^{\log_3 9} = 0$;
45. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$;
46. $\log_2 x + \log_4 x = 2^x$;
47. $\log_2 x + \log_4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
48. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$;
49. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;

$$25. \log_{3x^2-1} x = \log_{3x} x;$$

$$50. \log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{2}.$$

Решите уравнение с параметром a относительно x :

$$1. (x-a) \log_2 x = 0; \quad 3. 2 \lg(x+3) = \lg(ax); \quad 5. \log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{\frac{1}{a}} x = 0.$$

$$2. 2 \ln(3-x) = \ln(ax); \quad 4. 2^{2x-x^2} = \frac{a-2}{a^2-1};$$

6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $2 \lg(x+1) = \lg(ax)$ имеет единственное решение?

7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(a - 3x)$ имеет единственное решение?

8. Выяснить, сколько корней имеет уравнение $x^{\log_2 x} = ax$ при каждом значении параметра a ?

9. Определить, при каких a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет ровно два решения?

Решите систему уравнений:

$$1. \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 2 \\ \log_{25}(x+y) = 0.5 \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} \log_5(\log_3 x + \log_3 y) = 0 \\ 4^{x-y} = 16 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \lg x + \lg y = \lg 2 \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} 3^{x^2-2xy} = 1 \\ 2 \log_3(y+2) = \log_3(5x-1) \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x^{\log_2 y} = 3 \\ xy = 6 \end{cases};$$

$$9. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ \log_2(x+1) = 1 + \log_4 y \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 4 \\ 2 \lg y - \lg x + \lg 3 = 0 \end{cases};$$

$$10. \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1 \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} \log_2(xy) - \frac{1}{2} \log_2 x^2 = 1 \\ \log_{x^2} y^2 + \log_2(y+6) = 4 \end{cases};$$

$$11. \begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y - 2 \log_2^2 x = 0 \\ 2x^2 y - xy^2 = 1 \end{cases};$$

$$12. \begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50 \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1.5 \end{cases}.$$

Решите неравенства:

1. $\lg(x^2 + 2x + 2) > 1$;

2. $\log_{0.5} \frac{5x-3}{x+2} > 1$;

3. $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{6}{x} \right) < \log_{\frac{1}{3}} (x+5)$;

4. $\log_{0.8} (2x^2 + 2) > \log_{0.8} (7x - 1)$;

5. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0.3 > 0$;

6. $\log_2 (1 + \log_{\frac{1}{3}} x) < 1$;

7. $\log_2 (3 - x) \geq 3 - \log_2 (1 - x)$;

8. $\lg(2 - 3x) + \lg(2 + 3x) > \lg(4 - x) + \lg x$;

9. $\ln(1 - x)^4 \geq 4$;

19. $\frac{3x^2 - 2x - 1}{\lg(x - 1)} < 0$;

20. $\frac{1}{\lg x} - \frac{1}{\lg x - 1} > 1$;

21. $\frac{\lg x^4 - 2 \lg(2x + 3)}{\lg(2 - \sqrt{3})} \geq 0$;

22. $\log_{3x^2} 9 - \log_{\sqrt{3}} x \geq 2$;

23. $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 \leq 2$;

10. $\lg(x - 5)^2 \leq 2$;

11. $56 + (\log_3(-243x)) \cdot \log_3 \left(\frac{x}{81} \right)^4 \geq 0$;

12. $\log_2^2 x - \log_2 x^2 > 3 + 8 \log_2 16$;

13. $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{16} + 3 < 0$;

14. $\log_4^2 (x - 1)^2 + 5 \log_4 (x - 1) > 3 + 2 \log_4^2 (x - 1)$;

15. $3^{\log_2 \frac{3x-1}{x}} < 1$;

16. $\log_3 (3^x - 8) < 2 - x$;

17. $\log_{\frac{2}{3}} (4x - x^2) > 1$;

18. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x)} > -1$;

24. $\log_2 \log_{\sqrt{5}} (x - 1) \leq 1$;

25. $\frac{4x^2 - 1}{\log_{1.7} \left(\frac{1}{2} (1 - \log_7 3) \right)} \leq 0$;

26. $\log_{x+1} (5x^2 - x) \geq 2$;

27. $\log_{1-x} (3x^2 - x) \leq 2$;

28. $\log_{x^2} (7x - 3) < 1 + \log_{x^2} 2$.

Решите неравенство с параметром a относительно x :

1. $\log_a (x - 1) + \log_a x > 2$;

3. $\log_{\frac{x^2+a^2}{2}} x \geq 1$;

2. $\log_{x+2} (x^2 - 2x + a) \geq 2$;

4. $\log_a x + \log_a (x - 2) \geq 1$.

5. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $\log_{a^2-1} (x^2 + 2) > 1$ выполняется при любом значении x .

6. Найти сумму натуральных a таких, что неравенство $2 \log_{0.5} a - 3 + 2x \log_{0.5} a - x^2 < 0$ выполняется при всех x .