

## **IX. Тригонометрические уравнения и неравенства.**

*Решите уравнение:*

1.  $\cos x = 1$ ;
2.  $\sin x = -1$ ;
3.  $\cos x = 0$ ;
4.  $\operatorname{tg}x = 0$ ;
5.  $\operatorname{ctg}x = -1$ ;
6.  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
7.  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ;
8.  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ;
9.  $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;
10.  $\sin(\pi(x-2)) = 0$ ;
11.  $\cos(\pi(x+3)) = 1$ ;
12.  $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$ ;
13.  $\sin(2x+3\pi) \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x \cos 2x = -1$ ;
14.  $\sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(2x+4\pi) - \sin(5x+\pi) \sin 2x = 0$ ;
15.  $\cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0$ ;
16.  $\cos^2 x = \sin x - 1$ ;
17.  $\sin x - 1 = 2 \cos 2x$ ;
18.  $\sin 2x = \cos 4x$ ;
19.  $4 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$ ;
30.  $\cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{8}$ ;
31.  $\sin 2x = \sin x$ ;
32.  $\cos 20x = -\cos 5x$ ;
33.  $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x+3\pi)$ ;
34.  $\cos 4x = \sin 2x$ ;
35.  $\sin 8x + \cos 2x = 0$ ;
36.  $\sin\left(\frac{\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{9} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
37.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;
38.  $\sin x + \sin 5x = 2 \cos 2x$ ;
39.  $\cos 5x - \cos 2x + \cos x = 0$ ;
40.  $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$ ;
41.  $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$ ;
42.  $\cos^2 x + \cos^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$ ;
43.  $2 \sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$ ;
44.  $(\cos 3x + \sin 3x)^2 = 1 + \cos 2x$ ;
45.  $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$ ;
46.  $\sin x - \cos x = 1$ ;
47.  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ;
48.  $\sin 5x + \cos 3x = \sqrt{3} \sin 3x + \sqrt{3} \cos 5x$ ;

20.  $\sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} = 0$  ;      49.  $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8}$  ;  
 21.  $2 \sin 2x + 3 \cos 2x = 0$  ;      50.  $\cos^6 x + \sin^6 x = 2 \cos 4x$  ;  
 22.  $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0$  ;      51.  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$  ;  
 23.  $\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 3 \cos^2 \frac{x}{2}$  ; 52.  $2(\sin x - \cos x) + 3 \sin 2x = 2$  ;  
 24.  $6 \sin x \cos x - 8 \cos 2x = 0$  ;      53.  $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} x$  ;  
 25.  $4 \sin^2 5x - 2.5 \sin 10x = 6 \cos^2 5x$  ;      54.  $\operatorname{tg} 8x = -\operatorname{tg} 2x$  ;  
 26.  $2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 2$  ;      55.  $\sin^2 x + \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$  ;  
 27.  $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$  ;      56.  $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4}$  ;  
 28.  $1 + \cos x = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$  ;      57.  $\sin x \sin 3x = -1$  ;  
 29.  $8 \sin x \cos x \cos 2x = -1$  ;      58.  $\cos 2x + \sin 3x = -2$  ;  
 59.  $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{1 - \sin x} = 0$  ;      73.  $4^{\cos^2 x} = \frac{1 - \sqrt[6]{5}}{1 - \sqrt[12]{5}} + (1 - \sqrt[36]{5})(1 - \sqrt[36]{5} + \sqrt[18]{5})$  ;  
 60.  $\frac{\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x}{1 - \sin x} = 0$  ;      74.  $\left(\cos \frac{\pi x}{2} - 1\right) \log_5(100 - x^2) = 0$  ;  
 61.  $\frac{1 - \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = -2$  ;      75.  $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \sqrt{25 - x^2} = 0$  ;  
 62.  $\log_3(\sin 2x) = \log_3(-\sin x)$  ;      76.  $(c \operatorname{tg} x - 3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x) \sqrt{4 - x^2} = 0$  ;  
 63.  $\lg(\sin 2x) = \lg(-\cos x)$  ;      77.  $(2 \cos^2 x - \sin x - 2) \sqrt{9 - x^2} = 0$  ;  
 64.  $2 \cos^2 x - 5^{\log_5 \cos x} = 1$  ;      78.  $(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) \sqrt{3x - x^2} = 0$  ;  
 65.  $\sin^2 x + \frac{3}{8} 7^{\log_7 \sin x} = \frac{1}{16}$  ;      79.  $c \operatorname{tg} \pi x \log_2(1 - x^2) = 0$  ;  
 66.  $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x$  ;      80.  $\log_3(2x - x^2)(9^{\sin x} - 3) = 0$  ;  
 67.  $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x$  ;      81.  $(16^{\cos^2 x} - 8) \sqrt{-x^2 + 7x - 10} = 0$  ;  
 68.  $\operatorname{tg} 3x \sin 6x + \cos 6x - \cos 12x = 0$  ;      82.  $(5 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (\cos(\pi \cdot 3^x) + 1) = 0$  ;  
 69.  $c \operatorname{tg} 2x \cos x + \sin x = \cos x$  ;      83.  $\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$  ;  
 70.  $7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$  ;      84.  $\cos x = x^2 + 1$  ;  
 71.  $\sqrt{2}(1 + \cos x) = c \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  ;      85.  $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$  ;  
 72.  $144^{\sin x} = (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2$  ; 86.  $5^{\sin x} = 6 - \cos^2 \frac{4x}{5}$  ; 87.  $2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$  .  
 88. Определите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2(a^2 + 1)\cos^2 x + 4a^2 \cos x + 1 = 0$  не имеет решений?  
 89. Определите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a^2 + 1)\sin^2 x + 2a^2 \sin x + 0.5 = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 90. Определите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\sin^2 x + (a + 2)\sin x + 3a + 1 = 0$  не имеет решений?

*Решите неравенство:*

1.  $\sin x \geq 1$  ;      10.  $6 \cos^2 3x + 5 \cos 6x - 7 \leq 0$  ;

2.  $\cos x > -1$  ;      11.  $\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} \sin^2 \left( \frac{5\pi}{2} + 3x \right) \geq 0$  ;  
 3.  $2 \sin x > -\sqrt{3}$  ;      12.  $\frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x} > 0, x \in [0; \pi]$  ;  
 4.  $\cos 3x \leq 1$  ;      13.  $\frac{\sqrt{3} - 2 \cos x}{\sin^2 x} > 0, x \in (0; 2\pi)$  ;  
 5.  $\operatorname{tg} \frac{x}{4} \leq -\sqrt{3}$  ;      14.  $\frac{2 \cos x - 1}{1 - \cos^2 x} \geq 0, x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  ;  
 6.  $\operatorname{ctg} \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) > \sqrt{3}$  ;      15.  $\cos 2x + 2 \cos 2x \cos x \geq 0$  ;  
 7.  $2 \sin^2 x + \sin x \geq 0$  ;      16.  $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x > \sin 6x$  ;  
 8.  $4 \cos^2 x < 3$  ;      17.  $\sin x \sin 3x \geq \sin 5x \sin 7x$  ;  
 9.  $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 4 \geq 0$  .      18.  $\sin x > \cos 3x$  .

*Решите неравенство с параметром  $a$  относительно  $x$ :*

1.  $\sin x > a$  ;      4.  $\operatorname{ctg} x < a$  ;  
 2.  $\cos x \leq a$  ;      5.  $2 \log_{\sqrt{2} \cos a} (x-1) < \log_{\sqrt{2} \cos a} (7-x)$  ;  
 3.  $\operatorname{tg} x \geq a$  ;      6.  $\log_{\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{3}}} (x+3) > 2 \log_{\frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{3}}} (x+1)$  .

*Решите систему уравнений:*

$1. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$	$4. \begin{cases} x - y = \frac{1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2} \end{cases}$
$2. \begin{cases} \cos x \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	$5. \begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1 \\ \cos^2 x + \cos y = 1 \end{cases}$
$3. \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$6. \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{\sin x} \\ \cos x - \cos y = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$

## X. Тригонометрические уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

*Решите уравнение:*

1.  $4 \arccos^2 x = 1$  ;      7.  $4 \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{x+3} = \pi$  ;  
 2.  $4 \arcsin^2 x = 3$  ;      8.  $9 \arccos^2 2x - 3\pi \arccos 2x = 2\pi^2$  ;  
 3.  $27 \arccos^3 x = \arccos x$  ;      9.  $\frac{4}{\pi} \arcsin(x-1) = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2}$  ;

$$\begin{array}{ll}
4. \arcsin(\sin x) = x - 2\pi; & 10. \frac{2}{\pi} \arccos(-0.5x) = 2 + (x^2 - x - 2)^8; \\
5. \arccos(\cos x) = x - \frac{3\pi}{2}; & 11. \arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi x}{2}; \\
6. \log_{0.5\pi} \arccos(2x + 1) = 1; & 12. \arccos(6x - x^2 - 10) = \frac{\pi x}{3}.
\end{array}$$

*Решите уравнения и неравенства с параметром  $a$  относительно  $x$ :*

$$\begin{array}{ll}
1. \arcsin x = a; & 7. \arctgx \geq a; \\
2. \arccos x = a; & 8. \arcsin x < a; \\
3. \arccotgx = a; & 9. \arcsin x \leq a; \\
4. 4 \arccos^2 x = 1; & 10. \arccos x \leq a; \\
5. 27 \arccos^3 x = \arccos x; & 11. \arctgx \leq a; \\
6. 4 \arcsin^2 x = 3 & 12. \arccotgx \leq a.
\end{array}$$

## XI. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля.

### Частные случаи.

*Решите уравнение:*

$$\begin{array}{ll}
1. |3x - 1| = 5; & 15. \\
| \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} | = \frac{1}{2} - \sin(2x - \frac{\pi}{4}); & \\
2. 0.4|6 - 112 - 3x^2| + 3 = 4; & 16. |x^2 - 1| + 2|x| = x^2 + 2x - 1; \\
3. \ln|2x + 1| = 1; & 17. \left| 2 + \log_{\frac{1}{3}} x \right| = 3 - \left| 1 - \log_{\frac{1}{3}} x \right|; \\
4. |\lg(2x - 1)| = 1; & 18. |x^2 - 9| + |x + 3| = |x^2 + x - 6|; \\
5. |x^2 - 4x - 5| + |1 - x^2| = 0; & 19. |3^x - 2| + |2^x - 3| = |3^x + 2^x - 5|; \\
6. |2^x - 2^{1-x} - 1| + |\log_2 x - 1| = 0; & 20. |x - 1| + |x - 2| = 1; \\
7. |7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 5| + |9^{x-1} + 3^{x-1} - 2| = 0; & 21. |\log_3(2x - 1) - 2| + |\log_3(2x - 1) - 3| = 1; \\
8. |4 - 3x| = |5 + 2x|; & 22. \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2; \\
9. |x^4 - 3x^3| = 5|x^5|; & 23. x^2 - 6|x| + 8 = 0; \\
10. |\sin 2x| = |\cos 2x|; & 24. x^2 - 6x = 4|3 - x| - 9; \\
11. |\log_3 x| = \left| \log_3 \frac{x}{9} \right|; & 25. \sin^2 x = |\sin x|; \\
12. |x^2 - 1| = x^2 - 1; & 26. \lg_{\frac{1}{4}} x - 3|\log_2 x| + 5 = 0; \\
13. |8x^2 - 2x^4| = 2x^2(x^2 - 4); & 27. \left( \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^{|x|} + \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^{|x|} = 1; \\
14. 9^{3x-0.5} = 3^{|6x-1|}; & 28. \frac{4}{|x+1|-2} = |x+1|; \\
& 29. \left| \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 7x + 10} \right| = -\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 7x + 10}.
\end{array}$$

*Решите неравенства:*

1.  $|3x - 7| > 2 ;$
2.  $|x^2 - x| < 2 ;$
3.  $\log_2 \left| \frac{1}{2} - \cos x \right| \geq -1 ;$
4.  $|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3 ;$
5.  $\log_3 |3 - 4x| < 2 ;$
6.  $|x^2 + 4x^3| < |9x^2| ;$
7.  $(\operatorname{tg} 0.1)^{|x-6|} \leq (\operatorname{tg} 0.1)^{|x^2-5x+9|} ;$
8.  $x^2 - 7|x| + 12 > 0 ;$
9.  $2 \left( \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4x-1}{3x} \right)^2 \geq 3 \left| \frac{3x-2}{x-1} - \frac{1-4x}{3x} \right| ;$
10.  $|x - 5| \leq x - 5 ;$
11.  $|2x - 3| \geq 2x - 3 ;$
12.  $|x - 2x^2| > 2x^2 - x .$

## Общий алгоритм.

*Решите уравнение:*

1.  $|x - 8| = x^2 - x - 8 ;$
2.  $|2x - 3| - |4x - 5| = 6x - 1 ;$
3.  $\frac{|4x - x| - x}{|x - 6| - 2} = 2 ;$
4.  $\frac{4}{|x^2 + 5x|} = \frac{|x + 1|}{5x + x^2} ;$
5.  $|x - 1| - |x + 1| + |x + 4| = 3 ;$
6.  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = x - 1 ;$
7.  $\frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 2.5} = 2 ;$
8.  $\sqrt{|x|} = x ;$
9.  $\sqrt{x^2 - 3} + |x - 1| = x ;$
10.  $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + |2x - 1| ;$
11.  $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1 ;$
12.  $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1 ;$
13.  $|x|^{x^2 - 2x} = 1 ;$
14.  $\sqrt{2 \log_8(-x)} = \log_8|x| ;$
15.  $|x - 10| \log_2(x - 3) = 2(x - 10) ;$
16.  $|\lg x| + \lg|x| = 0 ;$
17.  $|\log_{\sqrt{2}} x - 2| - |\log_2 x - 2| = 2 ;$
18.  $(x^2 + 2) \cos x = 3x |\cos x| ;$
19.  $|\sin x| = \sin x + 2 \cos x ;$
20.  $\sqrt{3} |\cos x| = \sin x ;$
21.  $|\sin x + \cos x| = \cos x - \sin x ;$
22.  $\sin|x| = |\cos x| ;$
23.  $\left| \cos \frac{\pi x}{4} \right| = 2^{-1} \sqrt{2}, -4 \leq x \leq 2 ;$
24.  $\frac{2x-1}{|x+1|} + \frac{|3x-1|}{x+2} = 4 .$

*Решите неравенство:*

1.  $|x^2 - 2x| \geq x ;$
2.  $\frac{|4-x|-x}{|x-6|-2} < 2 ;$
3.  $\frac{(2x-1)(3-x)}{\log_2|x-1|} \geq 0 ;$
4.  $\log_{x^2} \frac{4x-5}{|x-2|} \geq \frac{1}{2} ;$
5.  $\left( \frac{1}{3} \right) \frac{|x+2|}{2-|x|} > 9 ;$
6.  $\log_{|x-4|} (2x^2 - 9x + 4) \geq 1 ;$
7.  $\frac{\log_2|x^2-1|+1}{x} \geq 0 ;$
8.  $\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x-3) < 0 ;$
9.  $|x-5|(2x-7) \leq 0 ;$
10.  $\frac{x^2 + 6x - 16}{|x|} \leq 0 ;$
11.  $(|x-2|-4) \sin \frac{7\pi}{5} > 0 ;$
12.  $(3 - |x-4|)(\sin x - 4) < 0 .$

*Решите систему уравнений и неравенств:*

$$1. \begin{cases} 2x + y = 7 \\ |x - y| = 2 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} \log_{|x|}(2 - \log_2 y) = 1 \\ y^2 + 2^{2|x|} = 2 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = 8 \\ |x + 3y| = 2 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} 5^{|x^2 - 5x + 4|} = 5^{y-2} \\ 3|y| - |y+1| + (y-2)^2 \leq 3 \end{cases}.$$

*Задачи с параметрами:*

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a^2(4^{-|x|} - 3) + a = 0$  имеет решения?

2. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a^2(2 - 3^{|x|}) + 2a(1 - 3^{|x|}) = 3^{|x|}$  имеет решения;

3. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} 3|x| + y = 2 \\ |x| + 2y = a \end{cases}$  имеет единственное решение?

4. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} x + y = a \\ y - |x| = 2 \end{cases}$  имеет единственное решение?

5. При каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ |y| + x = a \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение?

6. При каких значениях параметра  $a$  система неравенств  $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ |x - 4| < a \end{cases}$  не имеет решений?

7. При каких значениях параметра  $a$  система неравенств  $\begin{cases} |x - 1| \geq a \\ |2x + a| \leq 3 \end{cases}$  имеет единственное решение?

8. Для всех значений параметра определить число корней в уравнении  $x^2 - 2|x| = a$ .
9. При каких  $k$  неравенство  $1,5 - |x - k - 0,5| > 2x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное значение?
10. Найти все значения  $a$ , при которых неравенство  $x^2 + 4x + |a - 2| < 0$  имеет решения.
12. При каких  $a$  парабола  $y = x^2 - 2x + |a - 3|$  и прямая  $y = -3x$  имеют две общие точки?

## XII. Нестандартные способы решения уравнений и неравенств.

### Использование ООФ.

1.  $\sqrt{\cos \pi x - 1} = x^2 - 3x + 2$ ;
2.  $3^{\sqrt[4]{x^2}} = \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + 3x - x^2 - 1$ ;
3.  $5\sqrt{-x^2 + 9x - 14} - 2\sqrt[4]{x^2 - 5x - 14} - 1 = \sin \frac{\pi x}{2}$ ;
4.  $\sqrt[4]{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 - 8} = 2$ ;
5.  $2^{\sqrt{\cos x - 1}} + \log_2(x^2 + 1) > \sin x + 1$ ;
6.  $e^{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x^2 - 7x - 8} \geq -6$ ;
7.  $(\sqrt{x^2 - 16} + 1) \log_3(x^2 - 7) - \frac{x}{2} (\sqrt{16 - x^2} + 3) < 0$ ;
8.  $3^{\sqrt{\sin x - 1}} + \log_3(x^2 + 3) > \cos x + 2$ ;
9.  $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4 - 1} < 2^x - \log_2(1+x^4)$ ;
10.  $\log_5 x < \sqrt{1-x^4}$ ;
11.  $\log_2(2^x + 1 - x^2) > \log_2(2^{x-1} + 1 - x)$ ;
12.  $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ .

### Использование ограниченности.

1.  $1 + \ln(1 + \sqrt{(x-7) \cdot (14-x)}) = \cos^{2k-1} \pi k$ ;
2.  $\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{4x - x^2 - 3}$ ;
3.  $4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2 - x + 1}$ ;
4.  $\cos^2(x \sin x) = 1 + |\log_5(x^2 - x + 1)|$ ;
5.  $\log_2 x = 3 - x$ ;
6.  $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$ ;

7.  $|\lg(x-5)| + 2 = \sqrt{4 - (x-6)^2};$
8.  $|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5| \leq 4 - 2x - x^2;$
9.  $|\lg(x-2)| + 1 \leq -\cos \pi x;$
10.  $\log_2(x+2) > \frac{x}{x+0.5};$
11.  $\log_{0.5}(x-2) > x-3;$
12.  $x^3 - x - \sin \pi x = 0.$

### **Использование свойств числовых неравенств.**

1.  $2^{2^{\sin^2 \varphi}} + 2^{2^{\frac{\cos^2 \varphi}{2}}} = 2^{1+\sqrt[4]{2}};$
2.  $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} \leq 4 - \log_3^4(x^4 + x^2 + 1);$
3.  $2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x^2 + x}{6};$
4.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 - \sin^2 \frac{2001x}{2002}.$

### **Использование неотрицательности функций.**

1.  $x^4 + 5 \cdot 4^x + 4x^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0;$
2.  $1 - \sqrt{1 - x^2 - x^4} + \log_2(1 + x^2) = 0;$
3.  $(\log_2(x-5) - \sin \pi x)^2 + (x-6)^2 = 0;$
4.  $\log_2(x^2 + 2x + 2) + \log_3(x^6 + 2x^5 + x^4 + 1) = 0;$
5.  $\log_2(2x^2 - 4x + 3) + \log_3(1 + \sin^2 \pi x) = 0;$
6.  $(x^2 - 5x + 6)^2 + \lg(x^2 - 4x + 5) \leq 0;$
7.  $\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg^2(x^2 - 4x + 1) \leq 0.$

### **Метод оценок.**

1.  $\sqrt{2x - x^2} = x^4 + 1$
2.  $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = -2x - x^2$
3.  $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{1 - x^2}$
4.  $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{1 - 2x^2}$
5.  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 2 - x^2$
6.  $\sqrt{9-x} + \sqrt{-x} = 3 - x^2$
7.  $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2$
8.  $\sqrt{19-x} + \sqrt{x-1} = 6$
9.  $\sqrt{25-x} + \sqrt{x} = \sqrt{x} + x^3 + 5$

10.  $\sqrt{\frac{1}{3}-x}+x-1=\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\sqrt{x-\frac{1}{6}}$
11.  $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{-x^2+2x+3}>-x^2+3x-6$
12.  $\sin x \sin 3x = -1$
13.  $\cos 3x \cos x = 1$
14.  $\sin x + \cos 4x = 2$
15.  $\cos 2x + \sin 3x = -2$
16.  $\sin x \cos 2x \sin 5x = -1$
17.  $\sin x \cos 4x \cos 8x = 1$

### **Область определения и монотонность.**

1.  $\sqrt[3]{x-1}=5-2x;$
2.  $\sqrt{5x+6}+\sqrt{x^2+4x-3}=11-2x;$
3.  $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-35x}=8;$
4.  $\sqrt{3x+1}=-2x;$
5.  $\sqrt{2x-8}=\sqrt{7-x}+1;$
6.  $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x};$
7.  $3^{x+1}=11-2x;$
8.  $2^x+5^x=7^x;$
9.  $2^{x+2}=\frac{5x+3}{x};$
10.  $\frac{3^{x+1}+1}{3^x+2}=2;$
11.  $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1;$
12.  $2^{|x|+1}=2-x^2;$
13.  $\frac{6-3^{x+1}}{x}=\frac{10}{2x-1};$
14.  $\log_3(x+5)=\log_{\frac{1}{2}}x+4;$
15.  $\log_2(2-x)+\log_2(5-x)=2^x;$
16.  $\log_2(3^x+4)=2-5^x;$
17.  $x+2+\log_2 x=\log_2(3+5x);$
18.  $\log_2|x|=5-x^2;$
19.  $\log_2 x=6-x;$
20.  $\log_2 x=3^{-x}+\frac{8}{9};$
21.  $\log_2(3^x+4)=2-5^x;$
22.  $x \cdot \log_2 x=24;$
23.  $\arcsin \frac{x}{2}=\left(\frac{\pi}{6}\right)^x;$
24.  $x^5+2x^3=48;$
25.  $x^3+33=-2x;$

$$26. \begin{cases} x - y = \log_2 y - \log_2 x \\ x^2 + y = 12 \end{cases};$$

$$27. \begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y \\ 3x - y = 6 \end{cases}.$$

### **Область определения и множество значений.**

$$1. \sqrt{4-x^2} = x - 3$$

$$2. \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{8 - x^3} = x - 2$$

$$3. \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 6x + 10} = 3$$

$$4. \arctg^2(3x - x^2) + \sqrt[8]{x^5 - 2x^4 - 81} = 0$$

$$5. \frac{\cos^2 2x - 2 \sin 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-2}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$6. \sin^5 5x + \cos^5 5x = 1$$

$$7. \sin^5 x + \cos^9 x = 1$$

$$8. \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$$

$$9. \sin x + \cos x = 1.5$$

$$10. \sin x \cos x = \sin 35^\circ$$

$$11. x^2 - 2 \cos 2\pi x \cdot x + 1 = 0$$

$$12. \sin\left(2 \arcsin\left(6 \sin\left(\arcsin\frac{x}{120}\right)\right)\right) = \frac{3x}{50}; x \in N$$

$$13. \sqrt{x^2 - 8x} + \sqrt{x^2 - 24x} \leq 8$$

$$14. \sqrt{2+x-x^2} > x^3 - 9$$

$$15. \arccos(3x - 5) + \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0$$

$$16. \cos x < x^2 + 1$$

$$17. \cos x \geq 2^x + 1$$

$$18. \cos x \geq 1 + |x|$$

$$19. \cos x < 1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x}$$

$$20. \cos x > 1 + \frac{1}{1 + x^4}$$

$$21. \sin x \geq 2^{|x|}$$

$$22. \log_{0.8}(x^2 + y^2 + 2 - 2y + 2x - 2xy) = x^2 + y^2 - 8x - 8y + 2xy + 16$$