

I. Дробно-рациональные выражения.

Упростить:

1. $\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) \cdot \frac{1-x^2}{y+1} \div \frac{x^2+x}{1-y^2};$
2. $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right) \div \frac{a^2+b^2}{b^2-ab};$
3. $\frac{a^2+3a-4}{a^2-1} \cdot \frac{a^2+2a+1}{a+1} - a;$
4. $\left(\frac{a}{2+3a} - \frac{5a}{3a-2}\right) \div \frac{4a^3+4a^2}{9a^2-12a+4} + \frac{9a-6}{2a+3a^2};$
5. $\left(\frac{1}{t^2+3t+2} + \frac{2t}{t^2+4t+3} + \frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2 \cdot \frac{(t-3)^2+12t}{2};$
6. $\left(\frac{3ab}{4a^2+12ab+9b^2} - \frac{a}{2a+3b}\right) \cdot (2+3a^{-1}b)^2;$
7. $\left(c - \frac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c};$
8. $\left(\frac{q^3+8}{q^3+4q^2+4q} - \frac{2}{q+2}\right) \cdot (q-2)^{-2};$
9. $\frac{a+b}{a^2-4b+4a-b^2} \cdot \frac{16-b^2-a^2-2ab}{a^2+ab};$
10. $\frac{2}{a-1} + \frac{1-a^2}{a^2+1} \cdot \left(\frac{1}{(a-1)^2} - \frac{a}{1-a^2}\right);$
11. $\left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \frac{a}{a+b}\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{5} \cdot \left(\frac{a+b}{15}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{a-b};$
12. $\left(\frac{5a}{a-9} + \frac{42a}{a^2-18a+81}\right) \cdot \frac{a^2-81}{5a-3} - \frac{9(a+9)}{a-9};$
13. $\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^3+1}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-a+1}\right) \div \frac{a}{a+1};$
14. $\frac{(x^2+3x)^2-2x^2-6x-8}{x^4-5x^2+4} - \frac{4x^2+16x+16}{x^3+2x^2-4x-8};$
15. $\frac{3x^2+30x+75}{x^3+5x^2-25x-125} - \frac{x^4-10x^2+9}{(x^2-4x)^2-2x^2+8x-15};$
16. $\frac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7} + \frac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)};$
17. $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-c}} \cdot \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \div \frac{b-a-c}{abc};$
18. $\frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3y}{3x-2y}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{3x-2y} - \frac{3(2x+3y)}{(2y-3x)^2}\right);$

19. $\frac{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}{\frac{b(a+2b)}{b-a} + \frac{b^2}{a-b}} \cdot \frac{a + \frac{a^2}{b-a}}{a^3 - b^3};$
20. $\frac{3xyz}{yz + xz + xy} - \frac{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}};$
21. $\frac{\frac{m+n}{m-n} + \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}}{\frac{m-n}{m+n} - \frac{m^3-n^3}{m^3+n^3}} \div \frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{(n-m)^2};$
22. $\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)}{\frac{y(x+y)}{y-x} + \frac{y^2}{x-y}} \cdot \frac{x + \frac{x^2}{y-x}}{x^3 - y^3};$
23. $\frac{2 - \frac{(x+2)^2}{2}}{2 - \frac{(x-1)^2}{2}} \div \left(\frac{3x^2 - 3x^3}{x^3 - 3x^2 - x + 3} - \frac{x^3}{x-3} \right);$
24. $\left(\frac{3(x+2)}{2(x^3 + x^2 + x + 1)} + \frac{2x^2 - x - 10}{2(x^3 - x^2 + x - 1)} \right) \div \left(\frac{5}{x^2 + 1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right);$
25. $\left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2 + y^2 + y - 2}{x^2 - xy - 2y^2} \right) \div \frac{4x^4 + 4x^2y + y^2 - 4}{x^2 + y + xy + x};$
26. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)};$
27. $\frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+9)} + \frac{1}{(x+9)(x+12)} + \frac{1}{(x+12)(x+15)};$
28. $\frac{x}{ax - 2a^2} - \frac{2}{x^2 - 2a + x - 2ax} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{3+x} + \frac{4x^2 + 8x + 4}{(x+1)(x+3)} \right);$
29. $\frac{2a}{a^2 - 4x^2} + \frac{1}{2x^2 - 3a + 6x - ax} \cdot \left(\frac{x^2 - 9}{x-2} + \frac{x^2 + 6x + 9}{(x-2)(x+3)} \right);$
30. $\frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6};$
31. $\frac{2b + a - \frac{4a^2 - b^2}{a}}{b^3 + 2ab^2 - 3a^2b} \cdot \frac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{a^2 - b^2};$
32. $\frac{a^4 - a^2 - 2a - 1}{a^3 - 2a^2 + 1} \div \frac{a^4 + 2a^3 - a - 2}{1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}};$
33. $\left(\frac{x^4 + 5x^3 + 15x - 9}{x^6 + 3x^4} + \frac{9}{x^4} \right) \div \frac{x^3 - 4x + 3x^2 - 12}{x^5};$
34. $\left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) \div \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2};$

$$35. \left(\frac{4(a+b)^2}{ab} - 16 \right) \left(\frac{(a+b)^2 - ab}{ab} \right) \div \frac{a^3 - b^3}{ab};$$

$$36. \left(\frac{a+3b}{(a-b)^2} + \frac{a-3b}{a^2-b^2} \right) \div \frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2};$$

$$37. \left(m+n - \frac{4mn}{m+n} \right) \div \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2} \right);$$

$$38. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) (a+b+c)^{-2};$$

$$39. \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \left(1 + \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} \right) \div \frac{a-b-c}{abc};$$

$$40. \left(\left(\left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2 + 3 \right) \div \left(\left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 + 3 \right) \right) \div \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1};$$

$$41. \left(\left(\frac{y}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - xy} \right) \cdot \frac{x^4}{x^2 y^2 - y^4};$$

$$42. \left(\frac{a}{a^2-4} - \frac{8}{a^2-2a} \right) \cdot \frac{a^2-2a}{4-a} + \frac{a+8}{a+2};$$

$$43. a - \left(\frac{(16-a)a}{a^2-4} + \frac{3+2a}{2-a} + \frac{3a-2}{a+2} \right) \div \frac{a-1}{a(a^2+4a+4)};$$

$$44. \frac{2b+a - \frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b} \cdot \frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2};$$

$$45. \frac{2}{a} - \left(\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a} \right) \div \frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1};$$

$$46. \frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} \div \left(\frac{1}{y^{-1}} - \frac{1}{x^{-1}} \right)^{-1};$$

$$47. \frac{1}{4} (b^{-1}+a^{-1}) \cdot \frac{a^{-2}+b^{-2}}{\left(\frac{ab}{a+b} \right)^{-1}} \cdot \left(\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}} \right)^{-1};$$

$$48. \frac{a - \frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a} - 1};$$

$$49. \frac{1 - \frac{3}{c}}{\frac{6c-9}{c} - c};$$

$$50. \frac{\frac{ab}{a-b} - c}{\frac{bc}{c-b} - a};$$

$$51. \frac{a - \frac{bc}{b-c}}{b - \frac{ac}{a-c}};$$

$$52. 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}};$$

$$53. 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+a}};$$

$$54. \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{1 - \frac{1}{a+1}}};$$

$$55. \quad 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{x + \frac{x}{x-1}}}.$$

$$56. \text{ Определить } x \text{ из пропорции } \frac{a-b-5}{x} = \frac{a^2-10a-b^2+25}{a^2+2ab-5a-5b+b^2}.$$

$$57. \text{ Определить } x \text{ из пропорции } \frac{4-9a^2-6ab-b^2}{9a^2+3ab-2b-4} = \frac{-2+3a+b}{x}.$$

II. Свойства степени.

Упростить:

$$1. \quad \frac{6m^3n^2}{35p^4} \cdot \frac{55a^2c^6}{24b^2} \cdot \frac{27c^4}{22a^9b};$$

$$14. \quad \frac{\sqrt[3]{b^2} \sqrt[4]{ab^2}}{(ab^{-2})^{\frac{3}{4}}} \div (a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}})^{-2};$$

$$2. \quad \frac{51a^6x^9}{56y^{11}} \cdot \frac{40xy^8}{9a^5} \div \frac{85ax^{10}}{21y^3};$$

$$15. \quad \frac{(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^4})^3} \cdot \frac{(\sqrt{a^3} \sqrt{a^2b})^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6};$$

$$3. \left(\frac{a^6 b^5 c^{-3}}{a^4 b^{-1} c^6} \right)^3 \div \left(\frac{a^{-2} b^6 c^3}{a^8 b^2 c^7} \right)^{-2};$$

$$16. \frac{2a^3 x^5}{3b^2 y^4} \cdot \frac{6ay^3}{5bx^4} \cdot \frac{by}{a^2 x^2};$$

$$4. \frac{(b^2)^{\frac{1}{5}}}{b^{-\frac{2}{5}}};$$

$$17. \frac{2a^3 b^8 c^4}{3x^3 y^4 z^8} \div \frac{4a^2 b^8 c^5}{5x^3 y^3 z^4};$$

$$5. (b^{\frac{5}{6}})^3 \sqrt[4]{b^3};$$

$$18. \frac{4a^7 b^4}{5c^4 d^3} \cdot \frac{15bc^3}{8a^6 d^2} \div \frac{3ab}{2cd};$$

$$6. \frac{(9m)^{\frac{3}{2}} \cdot m^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[6]{m^5}};$$

$$19. \frac{2a^2 b^3 c}{3x^2 y^8} \cdot \frac{a^m b^n c^r}{x^m y^n} \cdot \frac{6x^{m-1} y^{n-2}}{a^{m+1} b^{n+2} c^{r+3}};$$

$$7. (125x^{-6})^{-\frac{2}{3}};$$

$$20. \frac{5a^n b^{n-1} c^{n-2}}{6x^{n+1} y^{n+2} z^{n+1}} \div \frac{3a^{n-1} b^n c^{n+1}}{2x^{n-1} y^n z^{n+1}};$$

$$8. (64c^{-6})^{-\frac{2}{3}};$$

$$21. \sqrt{12m^{-4}n^3} \div \left(\left(\frac{m^5}{3n^{-4}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}};$$

$$9. (27x^{-3})^{-\frac{2}{3}};$$

$$22. \sqrt{a^3 b} \div \sqrt[3]{b^{-1} \sqrt{a^3}};$$

$$10. (16a^{-8})^{-\frac{3}{4}};$$

$$23. x^2 \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x \sqrt{x}}};$$

$$11. \frac{y^{10} \sqrt{y^3 \sqrt{y^2}}}{y^{\frac{7}{6}}};$$

$$24. \frac{x^2 \sqrt[3]{x^5 \sqrt{x^2}}}{\sqrt[15]{x^4}};$$

$$12. \frac{\sqrt[5]{a^{24} \sqrt{a^{-3}}}}{a^{-\frac{1}{4}}};$$

$$25. \frac{x^4 \sqrt{x^3 \sqrt{x^2}}}{x^6 \sqrt{x^5 \sqrt{x}}}.$$

$$13. \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{1}{n^{-1}} \cdot \sqrt{n^3}}}}{\sqrt[15]{n} \cdot \sqrt[5]{n^{-1}}};$$

Найти значение выражения:

$$1. \left(\frac{64a^{\frac{1}{6}} a^{-\frac{17}{5}}}{a^{-\frac{7}{30}}} \right)^{-\frac{1}{6}} \text{ при } a=25;$$

$$2. \left(\frac{a^{\frac{6}{7}} a^{-\frac{2}{3}}}{6a^{-\frac{17}{21}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ при } a=0,96;$$

$$3. \frac{\sqrt[3]{b \sqrt{b}} + \sqrt{b^3 \sqrt{b}}}{4b \sqrt{b(1 + \sqrt[6]{b})}} \text{ при } b = \frac{5}{64};$$

$$4. \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} \div \frac{\sqrt{a^{-1} - ba^{-2}}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} - ab \quad \text{при } a=3; b=2;$$

$$5. (3b^{-2} - 2a^{-1}) \cdot \left(\frac{b^{-2}}{3^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}a} \right) \cdot \left(4a^{-2} + \frac{b^{-4}}{3^{-2}} \right) \quad \text{при } a = -2; b = \sqrt{3};$$

6. Дана функция $f(x) = 3^{x+2} - 9^x$. Вычислить $f(x) + f(-x)$, если $3^x + 3^{-x} = 7$;

7. Дана функция $f(x) = 2^x - 4^{x+1}$. Вычислить $f(x) + f(-x)$, если $2^x + 2^{-x} = 5$;

III. Внесение (вынесение) множителя под знак корня.

Вынесите множитель из-под знака корня:

$$1. \frac{1}{2} ac \sqrt[3]{32a^3c^7};$$

$$2. \sqrt[3]{24a^6};$$

$$3. \sqrt[4]{162a^6}, \text{ где } a \geq 0;$$

$$4. \sqrt[4]{243a^4b^{12}c}, \text{ где } a \leq 0;$$

$$5. \sqrt[4]{-a^5b^4}.$$

Внесите множитель под знак корня:

1. $\frac{xy}{2z} \cdot \sqrt[3]{\frac{4z^4}{3x^2y^3}}$;
2. $a^3\sqrt[3]{5}$;
3. $a^4\sqrt[4]{3}$, где $a \geq 0$;
4. $ab^4\sqrt[4]{3}$, где $a \leq 0$, $b \leq 0$;
5. $-ab^4\sqrt[4]{2}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$;
6. $a^6\sqrt[6]{a}$.

Упростите:

1. $\sqrt{81b^2} - \sqrt{36a^2}$, если $a \leq 0$, $b \geq 0$;
2. $\sqrt[4]{10000m^4} + \sqrt{49n^2}$, если $m \geq 0$, $n \leq 0$;
3. $\sqrt[6]{64a^6} - \sqrt[4]{81a^8}$, если $a \leq 0$;
4. $\sqrt{9 - 6\pi + \pi^2} + 3$;
5. $\sqrt{e^2 - 4e + 4}$;
6. $\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}}$;
7. $\sqrt{a + 1 - 4\sqrt{a - 3}}$;
8. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, если $x < -1$, $2 < x < 5$, $x > 5$.

IV. Дробно-иррациональные выражения.

Упростите:

1. $\frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$;
2. $\frac{\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} + 2}{\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} - 2}$;
3. $\sqrt{\frac{2a + 2\sqrt{a^2 - 9}}{2a - 2\sqrt{a^2 - 9}}}$;
9. $\frac{x^{\frac{4}{5}} - 9}{x^{\frac{2}{5}} - 3} - x^{\frac{2}{5}}$;
10. $\frac{125 - a}{25 + 5a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} + \frac{25 - a^{\frac{2}{3}}}{5 - a^{\frac{1}{3}}}$;
11. $\frac{x^{\frac{3}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1} - 2x^{\frac{1}{8}}$;

$$4. \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}};$$

$$5. \frac{\sqrt{ab} + a}{\sqrt{ab} + b};$$

$$6. \left(\frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cdot \left(1 - a^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$7. \left(\frac{1 + \sqrt[3]{d}}{d - \sqrt[3]{d}} + d^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1} \cdot (1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}}); \quad 15. \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}; \quad 16. \frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}};$$

$$8. \left(\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{-2} - \left(-\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right)^{-2} \right) \sqrt{ab};$$

$$17. \frac{b^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{1}{2}} \sqrt{bc}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} - \frac{b - c}{b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + c} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{2}} + \sqrt{c}}{bc^{\frac{1}{2}} - c\sqrt{b}} - \frac{4}{b - c} \right)^{-1};$$

$$18. \left(\frac{3a^{\frac{1}{6}} - 2b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{3}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} \right) \cdot \left(\frac{3b \left(a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{b^{\frac{5}{6}}(a - b)} \right)^{-1};$$

$$19. \left(\left(\frac{8x^3}{1 - \sqrt{4x^2 + 1}} + \frac{8x^3}{1 + \sqrt{1 + 4x^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{8x^3 - 2x} - \frac{1}{8x^3 + 2x} \right) \right)^{-1};$$

$$20. \frac{2a + (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\left((a - 1)^{\frac{1}{2}} + (a + 1)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left((a - 1)^{\frac{3}{2}} - (a + 1)^{\frac{3}{2}} \right)}.$$

$$12. \frac{x\sqrt{x} + 27}{x - 3\sqrt{x} + 9} - \sqrt{x};$$

$$13. \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{\sqrt{y}}}{\sqrt[3]{y} + 2\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{x}};$$

$$14. \frac{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}} - \sqrt[4]{xy};$$

Найти значение выражения:

$$1. \frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + x}{x^{\frac{1}{2}}}, \text{ если } x = 9, y = 49;$$

$$2. \frac{-n^{1.5}}{3 - n^{0.5}} + \frac{3n^{1.5} + 81}{9 - n}, \text{ если } n = \frac{1}{100};$$

$$3. \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \right) \div \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \text{ если } a = 4, b = 5;$$

$$4. \frac{3\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0,2}}{3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} - \sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0,02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}};$$

$$5. \left(\sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right)^2} - \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} \right)^2 + 2^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos \frac{3\pi}{4};$$

$$6. \left(\sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)^3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \cdot \sin \frac{7\pi}{4};$$

$$7. \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right)^{-12} \cdot (9 - \sqrt{82})^3} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{82}}{82}\right)^{-2} \cdot (9 - \sqrt{82})^2}.$$

V. Логарифмические выражения.

Найти значение выражения:

1. $5^b + 6^c$, если $b = \frac{3}{\log_2 5}$, $c = (\log_5 6)^{-1}$;

2. 4^b , если $b = \log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} 10$;

3. $\log_5 a^8$, если $a = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$;

4. $\lg(2a) + \lg(5b)$, если $\lg(ab) = 3$;
 $\log_3 15 = b$;

5. $\lg\left(\frac{b}{100a}\right)$, если $\lg b = 5$, $\lg a = 1$;
 $\log_a b = 6$;

6. $3\log_{12} \sqrt[3]{a}$, если $\log_{12} a = -2$;

7. $3^{\log_9 a}$, если $a^4 = 36$;

;

10. $\log_{\pi^2} \frac{\pi^3}{ab^2}$, если $\log_{\pi^3} a = \log_{\pi^3} b = 1$;

11. $\lg 56$, если $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$;

12. $7\log_{\sqrt{b}/a} \frac{\sqrt{b}}{a}$, если $\log_a b = 4$;

13. $\log_2 360$, если $\log_3 20 = a$,

14. $\log_{\sqrt{b}/a} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{4} \log_{\sqrt{b}/a^2} b$, если

15. $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$;

16. $\log_{12} 60$, если $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$

$$8. \lg a + \lg\left(\frac{1}{a^2}\right), \text{ если } \log_{100} a = 4;$$

$$17. \log_8 a, \text{ если } \log_2 a = 6;$$

$$9. \log_{a\sqrt{b}} \frac{\sqrt{b}}{a^2} + \log_{b\sqrt{a}}(a\sqrt{b}) + \frac{1}{4} \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[5]{a}, \text{ если } \log_a b = 2.$$

Упростить:

$$1. a^{1+2(\log_b a)^{-1}} \cdot b - 2 \cdot a^{\log_a b+1} \cdot b^{\log_b a+1} + a \cdot b^{1+2(\log_a b)^{-1}};$$

$$2. \frac{\log_a \sqrt{a^2-1} \cdot \left(\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}\right)^2}{\log_{a^2}(a^2-1) \cdot \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}};$$

$$3. \frac{(\log_{ab} b) \cdot \log_a b}{b^{2\log_b \log_a b} - 1} \cdot \frac{\log_a b + \log_a \left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b - \log_{ab} b};$$

$$4. (\log_a c + \log_b c) \log_{ab} c - (\log_a c)(\log_b c);$$

$$5. \frac{\log_a x \log_a x}{\frac{b}{c}} + \frac{\log_b x \log_b x}{\frac{c}{a}} + \frac{\log_c x \log_c x}{\frac{a}{b}};$$

$$6. \frac{\log_a x \log_a x}{\frac{b}{c}} + \frac{\log_b x \log_b x}{\frac{c}{a}} + \frac{\log_c x \log_c x}{\frac{a}{b}};$$

$$7. \log_{\frac{a}{b}} x \log_{\frac{a}{c}} x + \log_{\frac{b}{c}} x \log_{\frac{b}{a}} x + \log_{\frac{c}{a}} x \log_{\frac{c}{b}} x;$$

$$8. \left(9 \cdot 2^{5\log_2 a} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\log_2 a}\right) \cdot 3^{\frac{1}{1-\log_a 3}}; a > 0; a \neq 1;$$

$$9. (4 \cdot 27^{\log_3 a} - 64^{\log_4 a}) \left(2 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 a}} + 6 \cdot 5^{\frac{1}{\log_5 a}}\right); a > 0; a \neq 1;$$

$$10. \sqrt{\log_a^2 3};$$

$$11. (x^{\lg y} + y^{\lg x}) \div x^{\lg y}.$$

VI. Тригонометрические выражения.

Упростить:

$$1. \sin(2\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$2. \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos \alpha - 3\cos(2\pi - \alpha);$$

$$3. \sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(x - 2\pi);$$

$$4. \frac{\cos^2(270^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}^2(\alpha - 720^\circ)} + \cos^2(180^\circ - \alpha) \div \operatorname{tg}^2(\alpha - 270^\circ);$$

$$5. 1 - \frac{\operatorname{tg}(\alpha + 270^\circ)}{\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)} + \sin(180^\circ + \alpha) \div \sin(270^\circ - \alpha);$$

$$6. \frac{\sin(180^\circ + \alpha) \cos(\alpha - 180^\circ) - \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{1 - (\sin(90^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha))^2};$$

7. $\frac{\sin(\alpha - \pi) \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi + \alpha)\right)^2};$
8. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(5\pi - \alpha) + \sin(\alpha - 2\pi) \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$
9. $\frac{1 - 2\sin^2(3\pi + \alpha)}{\sin(2.5\pi + \alpha) - \sin(\alpha - \pi)} + \frac{1 - 2\cos^2(\alpha - 7\pi)}{\cos(0.5\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha)};$
10. $\frac{1 - 2\cos^2(5\pi + \alpha)}{\sin(\alpha - 3\pi) - \cos(6.5\pi + \alpha)} + \frac{2\sin^2(\alpha - \pi) - 1}{\sin(1.5\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)};$
11. $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos(-\alpha)} - \frac{\sin(-\alpha)}{1 - \cos \alpha};$
12. $\frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha};$
13. $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha};$
14. $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cdot \sin \beta;$
15. $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{2 \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha};$
16. $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha;$
17. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha};$
18. $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot (1 + \sin^2 \alpha)};$
19. $\sin^6 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha;$
20. $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos(\alpha - \beta)};$
21. $20 \sin \frac{\pi}{6} \cos^2 \alpha \frac{1 - \operatorname{tg}^4 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$
22. $\frac{\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha}{\cos 4\alpha} - (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2;$
23. $\frac{1 - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}.$

Вычислить:

1. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{7};$
2. $\sin \alpha + \cos \alpha$, если $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4};$
3. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4};$
4. $\frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2;$
5. $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2};$
6. $\cos \beta$, если $\cos \alpha = \frac{1}{9}, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{2}{7}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$
7. $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2};$
8. $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{3};$
9. $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$
10. $\cos(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$, если $\cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha) = m;$

11. $\sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \pi/2) + 2 \sin(\pi + \alpha) + \cos \alpha \cdot \cos(\alpha - \pi/2)$, если $\alpha = \pi/3$;
12. $5 \sin^2 \alpha - 1$, если $\cos^2 \alpha = 0.3$;
13. $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos \alpha = 1/5$;
14. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \sqrt{2}/2$;
15. $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\cos 2\alpha}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 1/2$;
16. $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 3}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$;
17. $\frac{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$;
18. $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \sin^2 x$, $x = \frac{5\pi}{6}$;
19. $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos^2 x$, $x = \frac{2\pi}{3}$;

Упростить:

1. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\alpha}}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;
2. $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha}}$, $2\pi \leq \alpha \leq 4\pi$;
3. $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$;
4. $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}$;
5. $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6. $\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot 2 \operatorname{ctg} 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.