КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции.

а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ на отрезке [0; 1];

б) $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

2. Найдите диагональ прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 18 см и 24 см и имеющего с ним общий прямой угол.

---

3. Исследуйте функцию $y = \begin{cases} x^3 - 3x, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \le x \le \pi \end{cases}$ на монотонность и экстремумы.

---

4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x - 1 = a$ имеет три корня?

Вариант 2

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции.

а) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке [–2; 1];

б) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. В прямоугольном треугольнике с катетами 36 и 48 на гипотенузе взята точка. Из неё проведены прямые, параллельные катетам. Получился прямоугольник, вписанный в данный треугольник. Где на гипотенузе надо взять точку, чтобы площадь такого прямоугольника была наибольшей?

---

3. Исследуйте функцию $y = \begin{cases} 2\cos x + x, \text{ если } 0 \le x \le \pi, \\ x^3 + x + 2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$ на монотонность и экстремумы.

---

4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{5}{3}x^3 - 5x - 2 = a$ имеет два корня?

Решение вариантов контрольной работы

Вариант 1

1. а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$, [0; 1]

$y' = x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$

$2,3 \notin [0;1]$

$y(0) = 10$

$y(1) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 + 10 = 16 - \frac{13}{6} = 13\frac{5}{6}$

Ответ: $y_{\text{наим}} = 10; \; y_{\text{наиб}} = 13\frac{5}{6}.$

б) $y = \cos x - \sqrt{3}\sin x$, [–π; 0].

$y' = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$

$-\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$\sin x = -\sqrt{3}\cos x \quad \Big| : \cos x$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$

$-\frac{\pi}{3} \in [-\pi; 0]$

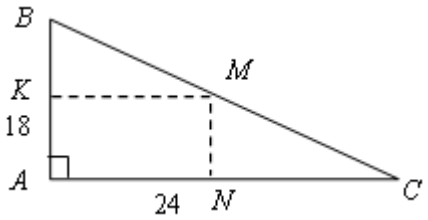
$y(-\pi) = \cos(-\pi) - \sqrt{3}\sin(-\pi) = -1 - \sqrt{3}\cdot 0 = -1$

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$y(0) = \cos 0 - \sqrt{3}\sin 0 = 1 - \sqrt{3}\cdot 0 = 1$

Ответ: $y_{\text{наим}} = -1; \; y_{\text{наиб}} = 2.$

2.



Пусть дан прямоугольный ΔABC, в котором $\angle A = 90°$, AB = 18, AC = 24. Пусть $AKMN$ – прямоугольник, вписанный в ΔABC.

1) Оптимизируемая величина – площадь прямоугольника $AKMN$. Обозначим её буквой S.

Пусть $KM = x$, тогда $NC = 24 - x$. Треугольники ABC и NMC подобны. Составим пропорцию:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{24-x}{24} = \frac{MN}{18}$$

$$MN = \frac{18(24-x)}{24} = \frac{3(24-x)}{4}.$$

Откуда

Выразим площадь прямоугольника $AKMN$:

$$S = KM \cdot MN$$

$$S = x \cdot \frac{3(24-x)}{4}, \quad x \in (0;24)$$

$$S = 18x - \frac{3x^2}{4}$$

2)

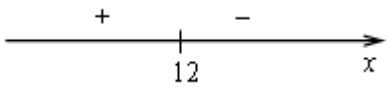
Найдем производную полученной функции:

$$S' = 18 - \frac{3x}{2}$$

$$18 - \frac{3x}{2} = 0$$

$$1{,}5x = 18$$

$$x = 12$$



$$x_{max} = 12$$

3) При x = 12 функция достигает наибольшего значения. Найдем стороны прямоугольника $AKMN$:

$$KM = 12, \; MN = \frac{3(24-12)}{4} = 9$$

По теореме Пифагора найдем диагональ прямоугольника:

$$KN = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Ответ: 15 см.

Глубов.рф

3. $y=\begin{cases}x^3-3x, \text{ если } x<0,\\ \sin x, \text{ если } 0\le x\le\pi\end{cases}$

1) Если $x<0,$ то $y'=3x^2-3.$

Если $0\le x\le\pi,$ то $y'=\cos x.$

Получим: $y'=\begin{cases}3x^2-3, \text{ если } x<0\\ \cos x, \text{ если } 0\le x\le\pi\end{cases}$

2) $x = 0$ – критическая точка.

Найдем стационарные точки:

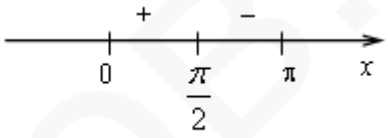
$3x^2-3=0$ $\qquad$ $\cos x=0$

$x^2=1$ $\qquad$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$x=\pm1$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

$-1\in(-\infty;0)$





↗ : $(-\infty;-1],\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

↘ : $[-1;0],\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

3)

$x_{\min}=0, y_{\min}=0$

$x_{\max}=-1, y_{\max}=2$

$x_{\max}=\frac{\pi}{2}, y_{\max}=1.$

4. $\frac{1}{3}x^3-x-1=a$ – 3 корня.

Решим это уравнение графически. Построим график функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-1.$

$f'(x)=x^2-1$

$x^2-1=0$

$x=\pm1$

Лубов.рф

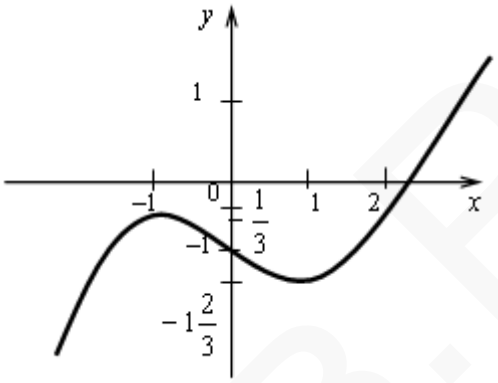


↗ : $(-\infty;-1],[1;+\infty)$

↘ : $[-1;1]$

$x_{max}=-1, y_{max}=-\frac{1}{3}+1-1=-\frac{1}{3}$

$x_{min}=1, y_{min}=\frac{1}{3}-1-1=-1\frac{2}{3}$



Прямая $y = a$ будет пересекать график этой функции в трёх точках, если $a \in \left(-1\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-1\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Ягубов.рф