В а р и а н т 1

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

2. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^4 + x^2 - 2$ в точках его пересечения с осью абсцисс. Найдите точку ппересечения этих касательных.

---

3. Исследуйте функцию $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на монотонность и экстремумы и постройте её график.

---

4. Найдите значение параметра *a*, при котором касательная к графику функции $y = a\,(1 + \sin 2x)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ параллельна биссектрисе первой координатной четверти.

В а р и а н т 2

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^4 - 2x^2 - 8$ в точках его пересечения с осью абсцисс. Найдите точ-кку пересечения этих касательных.

---

3. Исследуйте функцию $y = x - x^3$ на монотонность и экстремумы и постройте её график.

---

4. Найдите значение параметра *a*, при котором касательная к графику функции $y = a\,(7 + \cos 2x)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$ параллельна прямой $y = -\sqrt{3x} + 7$.

Решение вариантов контрольной работы

В а р и а н т 1

1. $y = \sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right), \ x = \frac{\pi}{3}.$

$$f(x) = \sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 3\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = 1{,}5$$

Уравнение касательной:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1{,}5\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = 1{,}5x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = 1{,}5x + \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}$$

Ответ: $y = 1{,}5x + \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}$

2. $y = x^4 + x^2 - 2$

Найдем точки пересечения с осью $0x$:

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2$$

$$x = \pm 1$$

Составим уравнение касательной в точке $x = 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$f'(1) = 4\cdot 1^3 + 2\cdot 1 = 6$$

Получим, $y = 0 + 6(x - 1)$

$$y = 6x - 6$$

Составим уравнение касательной в точке $x = -1$:

$f(-1) = 0$

$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) = -4 - 2 = -6$

Получим $y = 0 - 6(x+1)$

$y = -6x - 6$

Найдем точку пересечения касательных:

$6x - 6 = -6x - 6$

$12x = 0$

$x = 0$

$y = 6 \cdot 0 - 6 = -6$

Ответ: $y = 6x - 6$, $y = -6x - 6$, (0; –6).

3. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

1) Область определения: $D(y) = R$

2) Чётность / нечётность:

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3$ – чётная.

3) Асимптоты.

Асимптот нет.

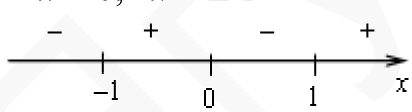
4) Монотонность и экстремумы.

$y' = 4x^3 - 4x$

$4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, \quad x = \pm 1$



$\searrow$: $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$

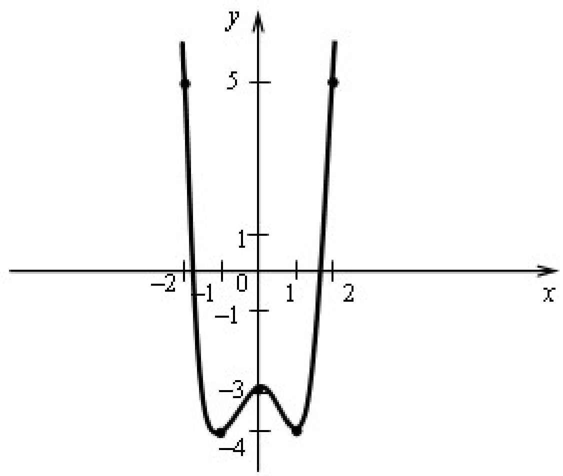
$\nearrow$: $[-1; 0]$, $[1; +\infty)$

$x_{\min} = \pm 1, y_{\min} = -4$

$x_{\max} = 0, y_{\max} = -3$

5) Контрольные точки:

x	± 2	$\pm\sqrt{3}$
y	5	0



4. $y = a(1+\sin 2x)$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Биссектриса первой координатной четверти имеет уравнение $y = x$. Если касательная ей параллельна, то она имеет такой же угловой коэффициент, то есть $k = 1$.

Таким образом, нужно найти такое значение параметра *a,* при котором производная данной функции в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$ равна 1.

$y' = 2a\cos 2x$

$y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2a\cos\dfrac{2\pi}{3} = -2a\cdot\dfrac{1}{2} = -a$

$-a = 1$

$a = -1$

Ответ: $a = -1$.