

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

В а р и а н т 1

1. Не выполняя построения, установите, принадлежит ли графику функции

$$y = -\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{точка:}$$

а) $M(0; -\sqrt{3})$; б) $P\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$.

2. Исследуйте функцию на четность.

а) $y = x^2 \sin 3x$; б) $y = |\operatorname{ctg} x| + \cos x$; в) $y = \frac{x^6}{2} - \sin x$.

3. Исследуйте функцию $y = |\operatorname{ctg} x| + \cos x$ на периодичность; укажите основной период, если он существует.

$$-\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. Решите графически уравнение

5. Постройте график функции, указанной в пункте а) или б).

а) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1$; б) $y = 2 \sin \frac{1}{2} x$.

6. При каком значении параметра a неравенство $a - x^2 \geq |\sin x|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

В а р и а н т 2

1. Не выполняя построения, установите, принадлежит ли графику функции

$$y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \quad \text{точка:}$$

а) $M(\pi; 0)$; б) $P(0; -1)$.

2. Исследуйте функцию на четность.

а) $y = \frac{\sin 2x}{x^2}$; б) $y = \operatorname{tg} x + 3 + x^5$; в) $y = |\sin x| - \cos x$.

3. Исследуйте функцию $y = |\sin x| - \cos x$ на периодичность; укажите основной период, если он существует.

4. Решите графически уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

5. Постройте график функции, указанной в пункте а) или б).

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$; б) $y = \frac{1}{2} \cos 2x$.

6. При каком значении параметра a неравенство $a + x^2 \leq |\cos x|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

Решение контрольной работы

В а р и а н т 1

1. $y = -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

а) $f(0) = -\operatorname{ctg}\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, значит, точка $M(0; -\sqrt{3})$ не принадлежит графику функции.

б) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, значит, точка $P\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ принадлежит графику функции.

О т в е т : а) нет; б) да.

2. а) $y = x^2 \sin 3x$, $D(f) = R$

$f(-x) = (-x)^2 \sin(3 \cdot (-x)) = x^2 \sin(-3x) = -x^2 \sin 3x = -f(x)$, значит, функция нечетная.

б) $y = |\operatorname{ctg} x| + \cos x$, $D(f) = R \setminus \{\pi, n \in Z\}$

$f(-x) = |\operatorname{ctg}(-x)| + \cos(-x) = |\operatorname{ctg} x| + \cos x = |\operatorname{ctg} x| + \cos x = f(x)$, значит, функция четная.

в) $y = \frac{x^6}{2} - \sin x$, $D(f) = R$

$f(-x) = \frac{(-x)^6}{2} - \sin(-x) = \frac{x^6}{2} + \sin x$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

О т в е т : а) нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная.

3. $y = |\operatorname{ctg} x| + \cos x$

Пусть T – основной период функции, тогда

$$f(x+T) = |\operatorname{ctg}(x+T)| + \cos(x+T) = f(x)$$

$T = \Pi$ – основной период для функции $y = |\operatorname{ctg} x|$.

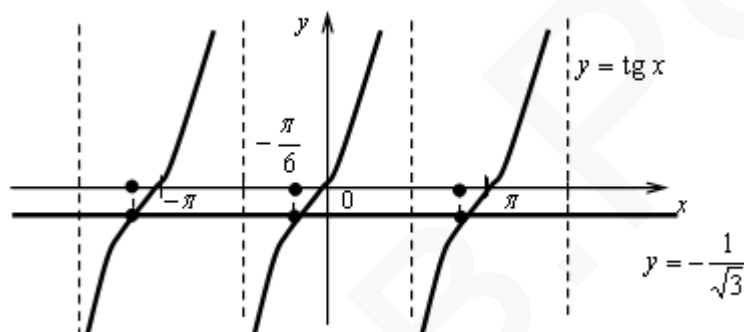
$T = 2\Pi$ – основной период для функции $y = \cos x$.

Значит, $f(x+2\pi) = |\operatorname{ctg}(x+2\pi)| + \cos(x+2\pi) = |\operatorname{ctg} x| + \cos x = f(x)$.

Ответ: $T = 2\Pi$.

4. $-\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

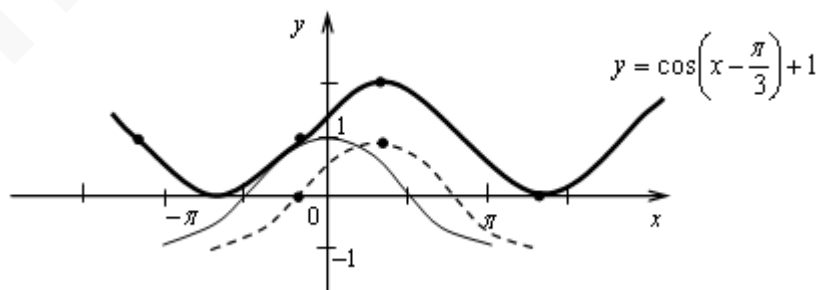


$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

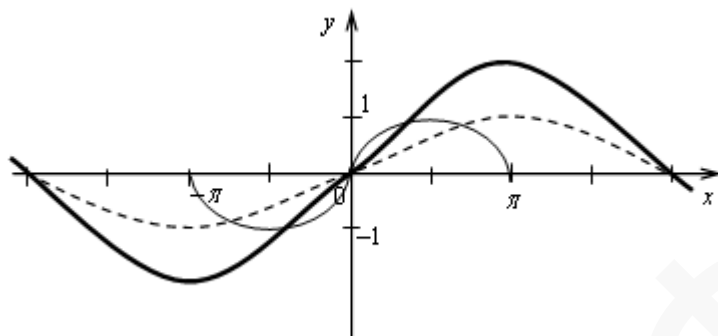
5. а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$

График функции получен параллельным переносом графика функции $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо и на 1 единицу вверх.



б) $y = 2 \sin \frac{1}{2} x.$

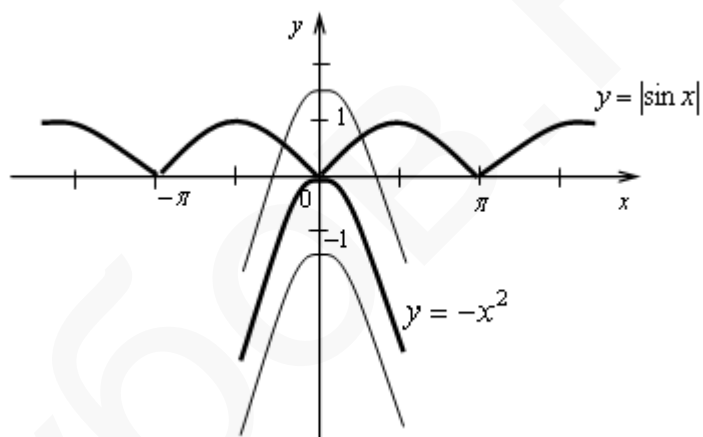
График функции получен из графика функции $y = \sin x$ растяжением от оси x и от оси y в 2 раза.



6. $a - x^2 \geq |\sin x|$

$$y = a - x^2$$

$$y = |\sin x|$$



Если $a < 0$, то неравенство не имеет решений;

$a > 0$, то неравенство имеет бесконечно много решений;

$a = 0$, то неравенство имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = 0$.