

что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

(С.Берлов)

11 класс

193. О функции $f(x)$, заданной на всей действительной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой. (А.Голованов)

194. См. задачу 179.

195. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей — молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали. (С.Берлов)

196. Многогранник описан около сферы. Назовем его грань *большой*, если проекция сферы на плоскость грани целиком попадает в грань. Докажите, что больших граней не больше 6. (М.Евдокимов)

197. Существуют ли действительные числа a , b и c такие, что при всех действительных x и y выполняется неравенство

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|? \text{ (В.Сендеров)}$$

198. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырех сторон от которой (т. е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно соседние с этой клеткой). (А.Голованов, Е.Сопкина)

199. См. задачу 184.

200. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке. (А.Голованов)

1999–2000 г.

8 класс

201. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2 b^2 (a^2 b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально. (Н.Агаханов)

202. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета. (С.Дужин)

203. Какое наименьшее число сторон может иметь нечетноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы?

(Л.Емельянов)

204. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

(Д.Храмцов)

205. Даны 8 гирек весом $1, 2, \dots, 8$ грамм, но неизвестно, какая из них сколько весит. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит, какая из гирек сколько весит, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

(А.Шаповалов)

206. Путь от платформы A до платформы B электропоезд прошел за X минут ($0 < X < 60$). Найдите X , если известно, что как в момент отправления от A , так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам.

(С.Токарев)

207. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая, симметричная AB относительно CE , пересекает прямую, симметричную BC относительно AD , в точке K . Докажите, что $KO \perp AC$.

(М.Сонкин)

208. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т. е. $1, 2, 4, 8, \dots$). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100 000. Докажите, что статистик ошибся.

(И.Рубанов)

9 класс

209. Миша решил уравнение $x^2 + ax + b = 0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

(М.Евдокимов)

210. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a , b и c , большие 1 и такие, что $2^a + 1$ делится на b , $2^b + 1$ делится на c , а $2^c + 1$ делится на a ? (В.Сендеров)

211. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными. (С.Берлов)

212. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N . Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN , пересекающие S_2 в точках B и C , а через точку D окружности S_2 — прямые DM и DN , пересекающие S_1 в точках E и F , причем A , E , F лежат по одну сторону от прямой MN , а D , B , C — по другую (см. рис. 10). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A , F , C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D . (М.Сонкин, Д.Терёшин)

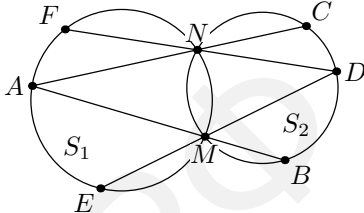


Рис. 10

213. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рис. 11. Докажите, что сумма всех чисел в таблице делится на 200. (Л.Емельянов)

1^3	2^3	3^3	$\dots$
2^3	3^3	4^3	$\dots$
3^3	4^3	5^3	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Рис. 11

214. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина — алюминиевые массой 10г, а остальные — дюралевые массой 9,9г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них — одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать? (С.Токарев)

215. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника BCD , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ACD , пересекает сторону BC в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника CMN . Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB . (М.Сонкин)

216. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , в котором число белых клеток нечетно. (Р.Садыков, Е.Черепанов)

10 класс

217. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных. (В.Произволов, В.Сендеров)

218. Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету? (Л.Емельянов)

219. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A , равным 60° . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABD . Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K . Найдите отношение AO/OK . (С.Берлов)

220. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали? (В.Замятин)

221. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \mathbb{R}$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2? \quad (Е.Знак, Жюри)$$

222. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $\frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа. (А.Храбров)

223. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N . Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB , из L на BC , из M на CD пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный. (П.Кожевников)

224. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины. Докажите, что страну можно разделить на $2N + 2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

(В.Дольников, Д.Карпов)

11 класс

225. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{10}) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных действительных корней. (Н.Агаханов)

226. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

(И.Рубанов)

227. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ действительных чисел такова, что для любого натурального n , $1 \leq n \leq 2000$, выполняется равенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

(С.Тухвебер)

228. См. задачу 220.

229. Для неотрицательных чисел x и y , не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}. \quad (\text{А.Храбров})$$

230. Окружность, вписанная в треугольник ABC , имеет центр O и касается стороны AC в точке K . Вторая окружность — также с центром O , пересекает все стороны треугольника ABC . Пусть E и F — соответственно ее точки пересечения со сторонами AB и BC , ближайшие к вершине B ; B_1 и B_2 — точки ее пересечения со стороной AC , причем B_1 — ближе к A . Докажите, что точки B , K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой. (М.Сонкин)

231. Даны числа $1, 2, \dots, N$, каждое из которых окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми? (С.Токарев)

232. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины. Докажите, что страну можно разделить на $N + 2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

(В.Дольников, Д.Карпов, С.Берлов)

2000–2001 г.

8 класс

233. Можно ли числа $1, 2, \dots, 10$ расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов? (Р.Женодаров)

234. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. Изобразенным назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных? (С.Волчёнков)