полосы можно будет разрезать на 2 части и переставить их местами так, что получится то же слово, записанное в обратном порядке. (Е.Черепанов)

685. Длины сторон треугольника являются корнями кубического уравнения с рациональными коэффициентами. Докажите, что длины высот треугольника являются корнями уравнения шестой степени с рациональными коэффициентами. (Н.Агаханов)

686. См. задачу 671.

687. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для любых четырех городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы любой из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов. (И.Иванов)

688. Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера касается его граней ABC , ABD , ACD и BCD в точках D_1 , C_1 , B_1 и A_1 соответственно. Рассмотрим плоскость, равноудаленную от точки A и плоскости $B_1C_1D_1$ и три другие аналогично построенные плоскости. Докажите, что тетраэдр, образованный этими четырьмя плоскостями, имеет тот же центр описанной сферы, что и тетраэдр $ABCD$. (Ф.Бахарев)

2003–2004 г.

9 класс

689. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов. (С.Берлов)

690. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K , внешних углов B и C — в точке L , внешних углов C и D — в точке M , внешних углов D и A — в точке N . Пусть K_1 , L_1 , M_1 , N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK , BCL , CDM , DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм. (Л.Емельянов)

691. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарiku. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какие-нибудь две коробочки, в которых лежат белые шарики? (Жюри)

692. Даны натуральное число $n > 3$ и положительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1. \quad (\text{С.Берлов})$$

693. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q , что $m+n=p+q$ и $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004$? (И.Богданов)

694. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов? (О.Подлипский)

695. Натуральные числа от 1 до 100 расставлены по кругу в таком порядке, что каждое число либо больше обоих соседей, либо меньше обоих соседей. Пара соседних чисел называется *хорошей*, если при выкидывании этой пары вышеописанное свойство сохраняется. Какое минимальное количество хороших пар может быть? (С.Берлов)

696. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , T — центр описанной окружности треугольника AOC , M — середина AC . На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle ABC$. Докажите, что $BT \perp DE$.

(А.Смирнов)

10 класс

697. См. задачу 689.

698. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарiku. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик? (Жюри)

699. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K' , внешних углов B и C — в точке L' , внешних углов C и D — в точке M' , внешних углов D и A — в точке N' . Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку. (С.Берлов, Л.Емельянов, А.Смирнов)

700. См. задачу 692.

701. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n . Докажите, что не все ее члены различны. (А.Протопопов)

702. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в

каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого ее города, не выезжая за пределы республики. (Д.Карпов, А.Смирнов)

703. Треугольник T содержится внутри выпуклого центрально-симметричного многоугольника M . Треугольник T' получается из треугольника T центральной симметрией относительно некоторой точки P , лежащей внутри треугольника T . Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника T' лежит внутри или на границе многоугольника M . (В.Дольников)

704. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось? (Е.Чернышов, И.Богданов)

11 класс

705. См. задачу 689.

706. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — точка на окружности Ω , описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников $I_A CP$ и $I_B CP$, совпадает с центром окружности Ω . (А.Акопян, Л.Емельянов)

707. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$. (А.Быстриков)

708. В прямоугольной таблице 9 строк и 2004 столбца. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2004, каждое — по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более, чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке. (И.Богданов, Г.Челноков)

709. Пусть $M = \{x_1, \dots, x_{30}\}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n ($1 \leq n \leq 30$) — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M . Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$. (В.Сендеров)

710. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ ($N > 3$) попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

1) для любых N векторов этого множества найдется еще такой $N - 1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N - 1$ векторов равна нулю;

2) для любых N векторов этого множества найдутся еще такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

(О.Подлипский)

711. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

(В.Дольников)

712. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник Π . Докажите, что в прямоугольник Π можно поместить одну из граней параллелепипеда.

(С.Волчёнков)

2004–2005 г.

9 класс

713. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB < BC$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ , для всевозможных точек P и Q , выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP = CQ$, имеют общую точку, отличную от A .

(Т.Емельянова)

714. Леша поставил в клетки таблицы 22×22 натуральные числа от 1 до 22^2 . Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в этих клетках, делится на 4?

(О.Подлипский)

715. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 , каждое из которых больше единицы, равна S , причем $\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S$ для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1. \quad (\text{С.Берлов})$$

716. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

(М.Гарбер)

717. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

(О.Подлипский)