

$A_1B_1C_1D_1E_1$ (см. рис. 19) есть хотя бы одна целая точка.

(В.Дольников, И.Богданов)

612. Дана последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\dots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \dots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех k , для которых $m_k > \alpha$, меньше, чем $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\alpha}$.

(В.Дольников)

613. Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1. \quad (\text{А.Храбров})$$

614. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

(А.Храбров)

615. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O . Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD , окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD . Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

(П.Кожевников)

616. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в любой строке и в любом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, все четыре клетки на пересечении которых окрашены в разные цвета.

(С.Берлов)

2000–2001 г.

9 класс

617. Числа от 1 до 999 999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую — числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?

(Н.Агаханов)

618. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0 , что $P(x_0) < Q(x_0)$.

(Н.Агаханов)

619. Внутри параллелограмма $ABCD$ с тупым углом A выбрана точка K таким образом, что середина отрезка AD равноудалена от точек K и C , а середина отрезка CD равноудалена от точек K и A . Точка N — середина отрезка BK . Докажите, что углы NAK и NCK равны. (С.Берлов)

620. Дан выпуклый 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника.) (Ю.Лифшиц)

621. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет? (Ю.Лифшиц)

622. В компании из $2n + 1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех. (С.Берлов)

623. На большей стороне AC треугольника ABC взята точка N так, что серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на окружности, описанной около треугольника KBM . (С.Берлов)

624. Найдите все нечетные натуральные n ($n > 1$) такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n . (Д.Джукич)

10 класс

625. См. задачу 617.

626. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \dots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком). (Р.Карасёв)

627. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K , пересекает внешнюю окружность в точках A и B . Пусть M — середина дуги AB , не содержащей точку N . Докажите, что радиус окружности, описанной

около треугольника $ВМК$, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности. (Т.Емельянова)

628. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

(Д.Карпов)

629. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > \frac{1}{64}$. (Д.Терёшин)

630. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \dots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (Магическим называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.) (И.Богданов)

631. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 , отличные от точки пересечения высот H , такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H . (С.Берлов)

632. Найдите все натуральные числа n такие, что для любых двух его взаимно простых делителей a и b число $a + b - 1$ также является делителем n . (Д.Дзюкич)

11 класс

633. Пусть $2S$ — суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S . Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек? (Д.Кузнецов)

634. См. задачу 627.

635. На плоскости даны два таких конечных набора P_1 и P_2 выпуклых многоугольников, что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку и в каждом из двух наборов P_1 и P_2 есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов. (В.Дольников)

636. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное

количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть? (С.Токарев)

637. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β , что для любого действительного x будет выполняться неравенство $\alpha f(x) + \beta g(x) > 0$.

(С.Берлов, О.Подлипский)

638. a и b — различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на $a^2 + ab + b^2$. Докажите, что $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$. (С.Берлов)

639. В стране 2001 город, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога и нет города, соединенного дорогами со всеми остальными. Назовем множество городов D *доминирующим*, если любой не входящий в D город соединен дорогой с одним из городов множества D . Известно, что в любом доминирующем множестве хотя бы k городов. Докажите, что страну можно разбить на $2001 - k$ республик так, что никакие два города из одной республики не будут соединены дорогой. (В.Дольников)

640. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A , B и C и вторично пересекает ребра SA , SB и SC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1 , B_1 и C_1 , пересекаются в точке O . Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. (Л.Емельянов)

2001–2002 г.

9 класс

641. Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других? (Н.Агаханов)

642. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A , а на другой — точки B и C так, что B лежит между O и C . Проведена окружность с центром O_1 , вписанная в треугольник OAB , и окружность с центром O_2 , касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA , OC треугольника