бого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах. *(Д.Карпов, Р.Карасёв)*

565. Внутри параболы $y = x^2$ расположены несовпадающие окружности ω_1, ω_2, ω_3, $\ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей параболы и внешним образом окружности ω_{n-1} (см. рис. 17). Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине. *(М.Евдокимов)*

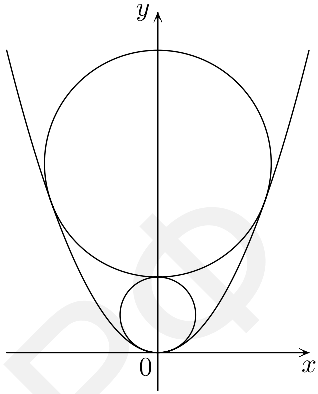

Рис. 17

566. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности? *(Г.Гальперин)*

567. В тетраэдр $ABCD$, длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01. *(Р.Карасёв)*

568. Клетчатая фигура Ф обладает свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m \times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Ф можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника, накрытых фигурой Ф была положительна (фигуру Ф можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Ф в несколько слоев. *(А.Белов)*

1998–1999 г.

9 класс

569. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$? *(С.Волчёнков)*

570. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N-1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого. *(Д.Карпов)*

571. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 — середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 — середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2

с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2. *(М.Сонкин)*

572. Числа от 1 до 1 000 000 покрашены в два цвета — черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1 000 000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми? *(С.Берлов)*

573. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей (на рисунке $n = 5$).

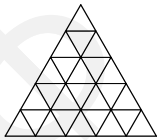

Рис. 18

Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков? *(М.Антонов)*

574. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}.$$

($\{k\}$ — дробная часть числа k.) *(А.Храбров)*

575. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой. *(С.Берлов)*

576. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре? *(Д.Карпов)*

10 класс

577. На столе стоят три пустых банки из-под меда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик — только во вторую или третью, а Пятачок — в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 1999 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл. *(Ф.Бахарев)*

578. Найдите все бесконечные ограниченные последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, для всех членов которых, начиная с третьего, выполнено

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_{n-2})}\,.$$

(С.Волчёнков)

579. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. К окружностям, вписанным в треугольники BKL, CLM и AKM, проведены попарно общие внешние касательные, отличные от сторон треугольника ABC. Докажите, что эти касательные пересекаются в одной точке. *(М.Сонкин)*

580. В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. *Ходом* называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее, чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов. *(С.Токарев)*

581. Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$? *(А.Голованов)*

582. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B, касается прямой BC, а окружность, проходящая через вершины B и C, касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K, $K \neq B$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что угол BKO — прямой. *(С.Берлов)*

583. Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \leqslant 2$. *(С.Злобин)*

584. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых. *(В.Дольников)*

11 класс

585. Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999? *(О.Подлипский)*

586. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдется такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине. *(С.Берлов)*

587. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон DA, AB, BC, CD в точках K, L, M, N соответственно. Пусть

S_1, S_2, S_3, S_4 — соответственно окружности, вписанные в треугольники AKL, BLM, CMN, DNK. К окружностям S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 проведены общие внешние касательные, отличные от сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, образованный этими четырьмя касательными, — ромб. *(М.Сонкин)*

588. См. задачу 580.

589. Четыре натуральных числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них делится на произведение двух оставшихся. Докажите, что по крайней мере три из этих чисел равны между собой. *(С.Берлов)*

590. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т. е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по ее разные стороны). *(В.Дольников)*

591. Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$. *(Д.Терёшин)*

592. В микросхеме 2000 контактов, первоначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода, причем Вася (он начинает) за ход режет один провод, а Петя — либо два, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выигрывает при правильной игре? *(Д.Карпов)*

1999–2000 г.

9 класс

593. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$. *(Н.Агаханов)*

594. Таня задумала натуральное число $X \leqslant 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?» Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов. *(А.Голованов)*

595. Пусть O — центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A,