натуральное. ЛЦ(n) — то же, но циркулем и линейкой. Докажите, что последовательность Ц(n)/ЛЦ(n) неограничена. *(А.Белов)*

492. См. задачу 484.

493. Докажите, что для любого натурального числа $a_1 > 1$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ делится на $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ при всех $k \geqslant 1$. *(А.Голованов)*

494. На карусели с n сиденьями мальчик катался n сеансов подряд. После каждого сеанса он вставал и, двигаясь по часовой стрелке, пересаживался на другое сиденье. Число сидений карусели, мимо которых мальчик проходит при пересаживании, включая и то, на которое он садится, назовем *длиной перехода*. При каких n за n сеансов мальчик мог побывать на каждом сиденье, если длины всех $n-1$ переходов различны и меньше n? *(В.Ню)*

495. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении $2 : 1$, считая от вершин, лежат на одной сфере. *(Д.Терёшин)*

496. См. задачу 488.

1995–1996 г.

9 класс

497. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1 000 000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде? *(А.Голованов)*

498. Центры O_1, O_2 и O_3 трех непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек O_1, O_2 и O_3 проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в

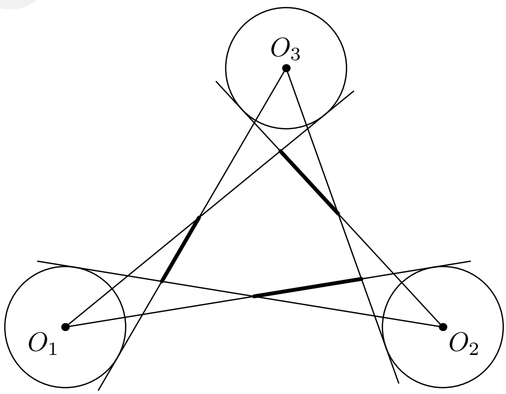

Рис. 15

красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков. *(Д.Терёшин)*

499. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что

$$x^n + y^n = p^k.$$

Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

(А.Ковальджи, В.Сендеров)

500. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов. *(А.Скопенков)*

501. Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10. *(Л.Купцов)*

502. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O — центр описанной окружности, точка I — центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны. *(М.Сонкин)*

503. На столе лежат две кучки монет. Известно, что суммарный вес монет из первой кучки равен суммарному весу монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k, не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, суммарный вес k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммарного веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй, каково бы ни было положительное число x.

(Д.Фон-дер-Флаас)

504. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток (т. е. фигурками, которые получаются из квадрата 2×2 удалением одной клетки), не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам? *(М.Евдокимов)*

10 класс

505. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

(М.Смуров)

506. На координатной плоскости расположены четыре фишки, центры которых имеют целочисленные координаты. Разрешается сдвинуть любую фишку на вектор, соединяющий центры любых двух из остальных фишек. Докажите, что несколькими такими перемещениями можно совместить любые две наперед заданные фишки. *(Р.Садыков)*

507. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$. *(А.Ковальджи, В.Сендеров)*

508. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ $(n < m - 1)$

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \ldots + a_m \cdot m^k = 0,$$

то в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть по крайней мере $n + 1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки. *(О.Мусин)*

509. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на ребрах? *(А.Шаповалов)*

510. Во взводе служат три сержанта и несколько солдат. Сержанты по очереди дежурят по взводу. Командир издал такой приказ:

1) За каждое дежурство должен быть дан хотя бы один наряд вне очереди.

2) Никакой солдат не должен иметь более двух нарядов и получать более одного наряда за одно дежурство.

3) Списки получивших наряды ни за какие два дежурства не должны совпадать.

4) Сержант, первым нарушивший одно из изложенных выше правил, наказывается гауптвахтой.

Сможет ли хотя бы один из сержантов, не сговариваясь с другими, давать наряды так, чтобы не попасть на гауптвахту? *(М.Куликов)*

511. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна $180°$. *(М.Смуров)*

512. Знайка пишет на доске 10 чисел, потом Незнайка дописывает еще 10 чисел, причем все 20 чисел должны быть положительными и различными. Мог ли Знайка написать такие числа, чтобы потом гарантированно суметь составить 10 квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$, среди коэффициентов p и q которых встречались бы все записанные числа, и действительные корни этих трехчленов принимали ровно 11 различных значений? *(И.Рубанов)*

11 класс

513. Может ли число, получаемое выписыванием в строку друг за другом целых чисел от 1 до n ($n > 1$), одинаково читаться слева направо и справа налево? *(Н.Агаханов)*

514. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась. *(А.Шаповалов)*

515. Докажите, что при $n \geqslant 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником. *(Н.Агаханов, Д.Терёшин)*

516. См. задачу 508.

517. Существуют ли три натуральных числа, больших 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на единицу, делится на каждое из остальных? *(А.Голованов)*

518. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает BC в точке E. Прямая, проходящая через точку E параллельно CD, пересекает AB в точке F. Докажите, что $BE = FD$. *(М.Сонкин)*

519. Существует ли такое конечное множество $\mathcal{M}$ ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества $\mathcal{M}$, все корни которого действительны и также принадлежат $\mathcal{M}$? *(Е.Малинникова)*

520. В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел? *(С.Токарев)*

1996–1997 г.

9 класс

521. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство
$$(P(xy))^2 \leqslant P(x^2) \cdot P(y^2).$$
(Е.Малинникова)