

2004–2005 г.

8 класс

361. В 12 часов дня «Запорожец» и «Москвич» находились на расстоянии 90 км и начали двигаться навстречу друг другу с постоянной скоростью. Через два часа они снова оказались на расстоянии 90 км. Незнайка утверждает, что «Запорожец» до встречи с «Москвичом» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» проехали в сумме 60 км. Докажите, что он не прав. (Е.Куликов)

362. В средней клетке полосы 1×2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает ее на 2 клетки, 1-й — на 4 клетки, 2-й — на 8 и т. д. (k -й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника? (О.Подлипский)

363. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11? (Р.Женодаров, И.Богданов)

364. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB . Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC' , отличная от A . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA . (В.Филимонов)

365. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно. (И.Богданов)

366. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P . Перпендикуляр к BP , проходящий через точку A пересекает прямую BC в точке Q . Докажите, что прямые PQ и CD параллельны. (А.Акопян)

367. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, n, m . (В.Сендеров)

368. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. (И.Богданов, Г.Челноков)

9 класс

369. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна ко-

манда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль? (Р.Женодаров, А.Храбров)

370. См. задачу 363.

371. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \dots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать? (Л.Емельянов)

372. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC , N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$. (А.Бадзян)

373. См. задачу 365.

374. Каждую вершину трапеции отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Докажите, что если получившиеся точки образуют четырехугольник, то он также является трапецией. (Л.Емельянов)

375. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \dots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \dots + a_{n+9}$ при любом натуральном n ? (В.Сендеров)

376. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящика, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов. (И.Богданов, Г.Челноков)

10 класс

377. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников. (Н.Агаханов)

378. Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}. \quad (\text{А.Храбров})$$

379. См. задачу 372.

380. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной*, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок. (И.Богданов, Г.Челноков)

381. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots$, состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n \cdot a_{n+31}$ делится на 2005.

Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

(В.Сендеров)

382. См. задачу 374.

383. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n + 1)$ -й степенью.

(В.Сендеров)

384. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны которого образуют углы в 45° с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки?

(С.Волчёнков)

11 класс

385. Найдите все пары чисел $x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

(И.Богданов)

386. Известно, что существует число S , такое, что если $a + b + c + d = S$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = S$. Найдите S .

(Р.Женодаров)

387. См. задачу 380.

388. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB , в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC .

(Л.Емельянов)

389. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .

(А.Голованов)

390. Каждую вершину выпуклого четырехугольника площади S отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Обозначим площадь получившегося четырехугольника через S' . Докажите, что $\frac{S'}{S} < 3$.

(Л.Емельянов)

391. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20} , больше: тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 7, или тех, у которых семнадцатая с конца цифра — 8?

(А.Голованов)

392. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

(И.Богданов, Г.Челноков, Е.Куликов)