100. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

(*И.Рубанов*)

101. Дана функция $f(x) = \big|4 - 4|x|\big| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$? (*Н.Нецветаев*)

102. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых различных натуральных a, b, c и d среди чисел

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}, \quad \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \quad \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)}, \quad \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)},$$

есть по крайней мере два числа, равных n. (*С.Дужин*)

103. В треугольнике ABC взята точка O такая, что

$$\angle COA = \angle B + 60^\circ, \quad \angle COB = \angle A + 60^\circ, \quad \angle AOB = \angle C + 60^\circ.$$

Докажите, что если из отрезков AO, BO, CO можно составить треугольник, то из высот треугольника ABC тоже можно составить треугольник и эти треугольники подобны. (*К.Кноп*)

104. Существует ли бесконечная периодическая последовательность, состоящая из букв a и b, такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)? (Последовательность называется периодической, если существует такое натуральное n, что для всякого $i = 1, 2, \ldots$ i-й член этой последовательности равен $(i+n)$-му.) (*А.Белов*)

1996–1997 г.

8 класс

105. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. (*Н.Агаханов*)

106. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза. (*А.Шаповалов*)

107. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен 60°.

(*В.Произволов*)

108. На предприятии трудятся 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия

издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие день приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников. (*Е.Малинникова*)

109. Отрезки AB, BC и CA — соответственно диагонали квадратов K_1, K_2, K_3. Докажите, что если треугольник ABC — остроугольный, то он полностью покрывается квадратами K_1, K_2 и K_3. (*Н.Агаханов*)

110. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1? (*А.Шаповалов*)

111. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$. (*С.Токарев*)

112. В Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей? (*И.Ященко*)

9 класс

113. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один — остроугольный. (*А.Шаповалов*)

114. На доске записаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре? (*А.Шаповалов*)

115. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза. (*А.Шаповалов*)

116. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочета-

ний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. (*А.Белов*)

117. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0. (*А.Фомин*)

118. См. задачу 110.

119. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые l_A, l_B, l_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке. (*М.Сонкин*)

120. См. задачу 112.

10 класс

121. Микрокалькулятор «МК-97» умеет над числами, занесенными в память, производить только три операции:

а) проверять, равны ли выбранные два числа;

б) складывать выбранные числа;

в) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x. Как с помощью «МК-97» узнать, равно ли это число единице? (*И.Рубанов*)

122. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности S_1, а вершины B и D — на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN. (*Л.Смирнова*)

123. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$. (*О.Тен*)

124. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3? (*Л.Емельянов*)

125. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно. (*А.Фомин*)

126. В городе Мехико в целях ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из

10 человек подкупила полицию, и для каждой машины они называют 2 дня, один из которых полиция выбирает в качестве «невыездного» дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение «невыездных» дней для автомобилей идет последовательно?

(*И.Ященко*)

127. Точки O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника O_1O_2A. (*М.Сонкин*)

128. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c}=\sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c}=$$
$$=\sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x=y=z$ или $a=b=c$. (*М.Сонкин*)

11 класс

129. См. задачу 121.

130. Все вершины треугольника ABC лежат внутри квадрата K. Докажите, что если все их отразить симметрично относительно точки пересечения медиан треугольника ABC, то хотя бы одна из полученных трех точек окажется внутри K. (*А.Белов*)

131. Обозначим через $S(m)$ сумму цифр натурального числа m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$S(3^n) \geqslant S(3^{n+1}).$$ (*В.Дольников*)

132. См. задачу 124.

133. Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через $\overline{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B $A \cup B$ — также фракция. (*А.Скопенков*)

134. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b)+\log_b(\log_b c)+\log_c(\log_c a) > 0.$$ (*С.Токарев*)

135. Существуют ли выпуклая n-угольная ($n \geqslant 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды равны трехгранным углам треугольной пирамиды? (*Н.Агаханов, Р.Карасёв*)

136. Для каких α существует функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x)+f(y)\ ?$$ (*Л.Емельянов*)