1995–1996 г.

8 класс

73. Мороженое стоит 2000 рублей. У Пети имеется
$$400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$$
рублей. Достаточно ли у Пети денег на мороженое?[1] *(К.Кноп)*

74. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число *отличных* билетов. *(А.Шаповалов)*

75. Существует ли такой выпуклый (все углы меньше 180°) пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC — тупые? *(К.Кноп)*

76. На столе лежат n спичек ($n > 1$). Двое игроков по очереди снимают их со стола. Первым ходом игрок снимает со стола любое число спичек от 1 до $n - 1$, а дальше каждый раз можно брать со стола не больше спичек, чем взял предыдущим ходом партнер. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Найдите все n, при которых первый игрок может обеспечить себе выигрыш. *(И.Рубанов)*

77. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в любых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в любых двух строках — различным? *(А.Шаповалов)*

78. Точечный прожектор, находящийся в вершине B равностороннего треугольника ABC, освещает угол α. Найдите все такие значения α, не превосходящие 60°, что при любом положении прожектора, когда освещенный угол целиком находится внутри угла ABC, из освещенного и двух неосвещенных отрезков стороны AC можно составить треугольник. *(С.Дворянинов)*

79. Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Незнайка стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого. Какое число Незнайка стер? *(К.Кохась)*

80. Имеется 4 монеты, из которых 3 — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжелым грузом. Как за три

[1] Напомним, что олимпиада происходила до деноминации.

взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных? *(С.Токарев)*

9 класс

81. Найдите все пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ такие, что a и b — корни второго трехчлена, c и d — корни первого. *(И.Изместьев)*

82. В треугольнике ABC, в котором $AB = BC$, на стороне AB выбрана точка D, и вокруг треугольников ADC и BDC описаны окружности S_1 и S_2 соответственно. Касательная, проведенная к S_1 в точке D, пересекает второй раз S_2 в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$. *(М.Сонкин)*

83. Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое. *(Д.Храмцов)*

84. В одном из узлов шестиугольника со стороной n, разбитого на правильные треугольники (см. рис. 7), стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают ее в один из соседних узлов, причем запрещается ходить в узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре? *(Ф.Дужин)*

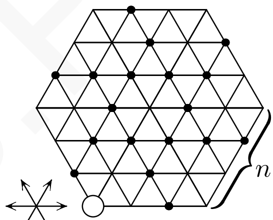

Рис. 7

85. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500. *(Р.Женодаров)*

86. См. задачу 78.

87. Докажите, что если $0 < a, b < 1$, то $\dfrac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \dfrac{1}{4}$. *(Л.Медников, М.Сонкин)*

88. Имеется 8 монет, 7 из которых — настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжелым грузом. Как за четыре взвешивания наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее остальных? *(С.Токарев)*

10 класс

89. Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab + bc + ca > a + b + c$, то $a + b + c > 3$. *(Р.Женодаров)*

90. Верно ли, что из произвольного треугольника можно вырезать три равные фигуры, площадь каждой из которых больше четверти площади треугольника? (*С.Августинович*)

91. Дан угол с вершиной B. Построим точку M следующим образом. Возьмем произвольную равнобедренную трапецию, боковые стороны которой лежат на сторонах данного угла. Через две противоположные ее вершины проведем касательные к описанной около нее окружности. Через M обозначим точку пересечения этих касательных. Какую фигуру образуют все такие точки M? (*М.Сонкин*)

92. В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4. (*В.Дольников*)

93. См. задачу 85.

94. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На отрезке A_0B_0 отмечены точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n, а на отрезке B_0C_0 — точки C_1, C_2, $\ldots$, C_n так, что все отрезки A_iC_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) параллельны между собой и все отрезки C_iA_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) — тоже. Отрезки C_0A_1, A_1C_2, A_2C_1 и C_1A_0 ограничивают некоторый параллелограмм, отрезки C_1A_2, A_2C_3, A_3C_2 и C_2A_1 — тоже, и т. д. Докажите, что сумма площадей всех $n-1$ получившихся параллелограммов меньше половины площади треугольника $A_0B_0C_0$. (*Л.Медников, М.Сонкин*)

95. См. задачу 88.

96. На прямой через равные промежутки отмечены 1996 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные — в синий. Затем Вася разбивает их на пары «красная»–«синяя» так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от того, какую раскраску сделал Петя. (*И.Изместьев*)

11 класс

97. См. задачу 81.

98. Назовем медианой системы $2n$ точек плоскости прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой точек этой системы поровну. Какое наименьшее количество медиан может быть у системы из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (*А.Шаповалов*)

99. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают весь треугольник. (*В.Дольников*)