48. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а на его границе — точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i в точку A_j, если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним из отрезков A_kB_k, $k \neq i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик сможет попасть из любой точки A_p в любую точку A_q. (*С.Мисник, Д.Фон-дер-Флаас*)

1994–1995 г.

9 класс

49. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{1}{xy}.$$

(*С.Дворянинов*)

50. Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом? (*А.Шаповалов*)

51. Две окружности радиусом R и r касаются прямой l в точках A и B и пересекаются в точках C и D (см. рис. 3). Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB. (*М.Сонкин*)

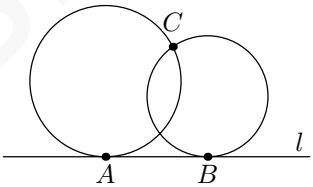

Рис. 3

52. Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашиваются в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов? (*С.Токарев*)

53. Найдите все простые p такие, что число p^2+11 имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число). (*Р.Женодаров*)

54. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (см. рис. 4). Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность S_1 в точке D, окружность S_2 — в точке E и прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$. (*М.Сонкин*)

55. Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (см. рис. 5). Назовем узлами вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности. (*Д.Кузнецов*)

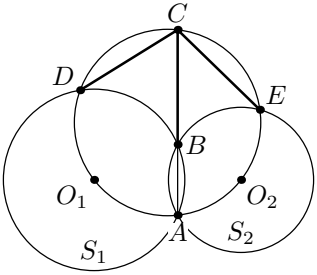

Рис. 4

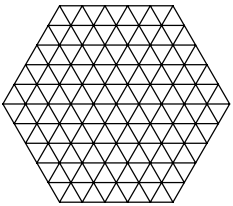

Рис. 5

56. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец? (*А.Шаповалов*)

10 класс

57. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найдите $\underbrace{f(\ldots f(f(19))\ldots)}_{95 \text{ раз}}$. (*А.Белов*)

58. Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m,n) + \text{НОД}(m,n) = m + n$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое. (*С.Токарев*)

59. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на медиане треугольника, проведенной из вершины B. (*А.Скопенков*)

60. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой. (*А.Берзиньш, И.Изместьев*)

61. Рассматриваются всевозможные квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, такие, что $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$ для всех x. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{a+b+c}{b-a}$? (*Р.Женодаров*)

62. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$. (*М.Сонкин*)

63. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т. е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое «ожерелье» из ку-

биков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины N?

(*Н.Авилов*)

64. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем. (*С.Дужин*)

11 класс

65. См. задачу 57.

66. В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

(*Д.Терёшин, Р.Карасёв*)

67. См. задачу 52.

68. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку. (*В.Дольников*)

69. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}$. (*А.Галочкин*)

70. Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, ... такова, что при всех неотрицательных m и n $(m \geqslant n)$ выполняется соотношение

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}\,(a_{2m} + a_{2n}).$$

Найдите a_{1995}, если $a_1 = 1$. (*О.Мусин*)

71. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (см. рис. 6). Луч O_1B пересекает S_2 в точке F, а луч O_2B пересекает S_1 в точке E. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF, вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AE + AF$. (*М.Сонкин*)

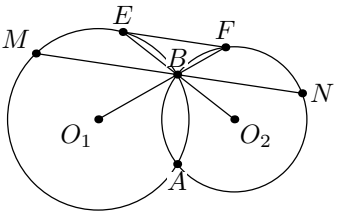

Рис. 6

72. См. задачу 64.