

9 класс

Второй день

- 9.5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?
- 9.6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC . Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC ?
- 9.7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x , то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.
- 9.8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т. е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях — искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

9 класс

Второй день

- 9.5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?
- 9.6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC . Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC ?
- 9.7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x , то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.
- 9.8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т. е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях — искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

10 класс

Второй день

- 10.5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что $1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$, $1 + y^4 \leq 2(z - x)^2$, $1 + z^4 \leq 2(x - y)^2$.
- 10.6. В неравностороннем остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC . Прямая BO пересекает сторону AC в точке P , а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.
- 10.7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \dots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k , но должен быть всегда больше 1.)
- 10.8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

10 класс

Второй день

- 10.5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что $1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$, $1 + y^4 \leq 2(z - x)^2$, $1 + z^4 \leq 2(x - y)^2$.
- 10.6. В неравностороннем остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC . Прямая BO пересекает сторону AC в точке P , а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.
- 10.7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \dots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k , но должен быть всегда больше 1.)
- 10.8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

11 класс

Второй день

- 11.5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10 . Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b , стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2 - ax + b = 0$ и $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня?
- 11.6. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1 A_2 \dots A_{2008}$, находящегося за ширмой. Он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.
- 11.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q — точки пересечения лучей BA и CD , BC и AD соответственно, а H — проекция D на PQ . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.
- 11.8. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой, и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

11 класс

Второй день

- 11.5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10 . Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b , стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2 - ax + b = 0$ и $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня?
- 11.6. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1 A_2 \dots A_{2008}$, находящегося за ширмой. Он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.
- 11.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q — точки пересечения лучей BA и CD , BC и AD соответственно, а H — проекция D на PQ . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.
- 11.8. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой, и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.