10 класс

Первый день

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности.

10.3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leqslant k, \ell \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11}+bx^4+c=0$, $bx^{11}+cx^4+a=0$, $cx^{11}+ax^4+b=0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности.

10.3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leqslant k, \ell \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)?

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11}+bx^4+c=0$, $bx^{11}+cx^4+a=0$, $cx^{11}+ax^4+b=0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.