10 класс

Первый день

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012?

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1+x$, $S_2 = 1+x+x^2$, $S_3 = 1+x+x^2+x^3, \ldots, S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k+1)$.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012?

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1+x$, $S_2 = 1+x+x^2$, $S_3 = 1+x+x^2+x^3, \ldots, S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k+1)$.