11 класс

Первый день

11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы.

11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$?

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

XXXIX Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы.

11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$?

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.