10 класс

Второй день

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?

XXXIX Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?