

V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап
26 января 2013 г.

—
8 класс.

Первый день.

1. Каждый из 10 гномов — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов — рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь», а оставшийся, Глоин, сказал: «Среди стоящих справа от меня есть рыцарь». Правду сказал Глоин или солгал?
2. На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.
3. На отрезке AB отмечена точка M . Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ . Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB , а F — середина отрезка DE . Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C .
4. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f) : (1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f) = 2012?$$