

# СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $E$  — произвольная точка внутри стороны  $AC$ . Известно, что  $BE \geq 2AM$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  тупоугольный.

*Наири Седракян*

- 6 2. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

*Михаил Кузнецов*

- 8 3. Требуется записать число вида  $77\dots7$ , используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по несколько штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа  $77$  самая короткая запись — это просто  $77$ . А существует ли число вида  $77\dots7$ , которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

*Сергей Маркелов*

- 8 4. Доска  $7 \times 7$  либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль  $2 \times 2$ . Решается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

*Рустэм Женодаров*

- 8 5. Равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность с центром  $O$ . Прямая  $BO$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $E$ . Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABE$  и  $DBE$  соответственно. Докажите, что точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O$ ,  $C$  лежат на одной окружности.

*Алексей Заславский*

- 7 6. Докажите, что  
3 а) любое число вида  $3k - 2$ , где  $k$  целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;  
б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

*Наири Седракян*

- 5 7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе — *сложным*. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что  
7 а) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;  
б) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

*Максим Дидин*

# СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

*Михаил Кузнецов*

- 7 2. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  с центром описанной окружности  $O$  проведены высоты  $AH_a$  и  $BH_b$ . Точки  $X$  и  $Y$  симметричны точкам  $H_a$  и  $H_b$  относительно середин сторон  $BC$  и  $CA$  соответственно. Докажите, что прямая  $CO$  делит отрезок  $XY$  пополам.

*Фольклор*

- 6 3. Докажите, что  
2 а) любое число вида  $3k - 2$ , где  $k$  целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;  
б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

*Наири Седракян*

- 8 4. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник  $M$ , в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у  $M$  лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали  $M$  по описанным правилам.

*Дмитрий Захаров*

- 8 5. Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно  $k$  больше  $30^\circ$ . Каково наибольшее возможное значение  $k$ ?

*Наири Седракян*

- 9 6. На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное  $R$ , что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса  $R$ , то на каждой дуге колеса величиной в  $1^\circ$  будет след хотя бы одной отмеченной точки.

*Иван Митрофанов*

- 10 7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется  $n > 1$  городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выигрывает, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе  
4 а) ровно  $2n$  жителей;  
б) ровно  $2n - 1$  жителей.

*Глеб Погудин*