Весенний тур XXVIII Турнира Архимеда. 5 класс
31 марта 2019 года
Личный этап

Задача 1. [**3 балла**] Вася взял числа **2007** и **444**, перемешал цифры в них и получил два натуральных числа, которые делятся на **7**. Что это могли быть за числа?

Ответ: одна из следующих пар **7** и **240044**; **7** и **400442**; **7** и **424004**; **7** и **442400**; **42** и **40047**; **42** и **40740**; **42** и **47040**; **42** и **74004**; **70** и **44240**; **420** и **4074**; **420** и **4704**; **427** и **4004**; **700** и **4424**; **742** и **4004**.

*Комментарий. Полезно заметить, что **1001** делится на **7**, тогда ясно, что можно взять число **4004** (или его же, но дописать к нему с любой стороны другое число, кратное **7**) и уже из небольшого числа оставшихся цифр составить еще одно число, кратное **7**.*

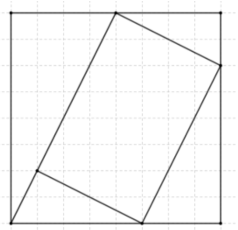
Примерные критерии проверки:

— любой из верных ответов: **3** балла;

— ответ, в котором одно число **0**, а другое кратно **7**: **2** балла;

— приведено несколько ответов, среди которых есть, как верные, так и неверные: **2** балла.

Задача 2. [**4 балла**] У Пети был бумажный квадрат **8×8** см. Петя взял ножницы и вырезал из него прямоугольник следующим образом. Первый разрез он сделал от вершины к середине стороны, второй — от конца первого под прямым углом, третий — от конца второго под прямым углом, а четвертый — от конца третьего под прямым углом (см. рисунок). Найдите площадь получившегося прямоугольника.



Ответ: **30** см^2.

Решение. Площадь первого отрезанного треугольника составляет половину площади прямоугольника **4×8** см, то есть **16** см^2. Аналогично площадь второго и третьего треугольников — **4** см^2 и **9** см^2 соответственно. А площадь четвертого отрезанного треугольника можно представить, как половину площади прямоугольника **2×5** см, или **5** см^2. Искомая площадь **64 − 16 − 4 − 9 − 5 = 30** см^2.

Примерные критерии проверки:

— получен верный ответ и указан способ вычислений (любым способом, в том числе подсчетом клеток): **4** балла;

— конструкция верно нарисована “по клеточкам”, но других существенных продвижений нет: **1** балл.

— при вычислении ответа допущена арифметическая ошибка: **3** балла;

— верно найдены площади трёх из четырёх отрезанных треугольников: **2** балла.

— только верный ответ без обоснований: 1 балл

Задача 3. [**5 баллов**] Ваня и Никита ели пирог. Через **5** минут, когда они съели треть пирога, к ним присоединилась Наташа. Еще через **5** минут Ваня и Никита наелись, и дальше Наташа продолжала уже одна. Через **15** минут она, наконец, доела пирог. За какое время она бы справилась с пирогом в одиночку?

Ответ: **1** час.

Решение. По условию Ваня и Никита за **5** минут съедают треть пирога. За следующие **5** минут они съедят еще треть. Значит, оставшуюся треть съела Наташа. Она ела **5** минут вместе с ними и еще **15** минут одна, то есть всего **20** минут. Следовательно весь пирог она съедает за **60** минут.

Примерные критерии проверки:

— обоснованно получен верный ответ: **5** баллов;

— при верных обоснованиях допущена арифметическая ошибка: **4** балла;

— записаны арифметические действия вида (**15** + **5**)·**3** = **60** без пояснений: **4** балла;

— указано, что Наташа съедает треть пирога, но дальнейшие рассуждения неверны: **3** балла;

— только верный ответ: **1** балл.

Задача 4. [**6 баллов**] Можно ли квадрат **2019×2019** клеток раскрасить в три цвета так, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце были клетки не более, чем двух цветов, а клеток каждого цвета было поровну?

Ответ: можно.

Решение. Разобьем квадрат на маленькие квадраты **3×3** и каждый из них покрасим, например, следующим образом:

1	**1**	**2**
2	**3**	**2**
1	**3**	**3**

Ясно, что в такой раскраске квадрата **2019×2019** все условия задачи будут выполнены.

Примерные критерии проверки:

— четкое описание верного примера: **6** баллов;

— только верный ответ: **0** баллов.

Задача 5. [**7 баллов**] У Юли есть набор из трёх кубиков с буквами на гранях. Все буквы на кубиках различны. Играя с кубиками, Юля составила их них слова ЕГЭ, ОГЭ, ГИА, ГВЭ, МЭР, ЭЖД и МЭШ. Можно ли из этих кубиков составить слово ЮЛЯ? *Если можно, то покажите, какие буквы могут находиться на каждом кубике, а если нельзя, то объясните, почему.*

Ответ: нет, нельзя.

Первое решение. Предположим, что слово ЮЛЯ составить можно. Заметим, что букв *Ю*, *Л* и *Я* в составленных словах нет, значит, как минимум одна грань каждого кубика не может использоваться в собранных словах. Рассмотрим кубик без букв *Э* и *Г*. На этом кубике должны быть буквы *Е*, *О*, *В* (из слов ЕГЭ, ОГЭ, ГВЭ), одна из букв *Ж* или *Д* (из слова ЭЖД), одна из букв *И* или *А* (из слова ГИА). Остались слова МЭР и МЭШ. Буквы *М*, *Р* и *Ш* не могут быть на кубике с буквой *Э* и не могут находиться все на одном кубике, значит одна из них займёт последнюю грань оставшегося кубика. Противоречие.

Второе решение. Всего использовано 12 различных букв, а на трех кубиках 18 граней. Во всех словах, кроме одного есть буква *Э*, значит, на кубике с буквой *Э* пока занята только две грани, а четыре грани свободны. Букву *Г* не содержат три слова, значит, на этом кубике занято не более четырех граней, а свободно — не менее двух. Всего свободно шесть граней, значит, на оставшемся кубике места под букву из слова ЮЛЯ нет.

Примерные критерии проверки:

— полное обоснованное решение: **7** баллов;

— в решении имеются пробелы в обоснованиях: **3-6** баллов (в зависимости от количества необоснованных утверждений);

— только верный ответ: **0** баллов.

Задача 6. [**9 баллов**] В классе **25** человек. На первое апреля каждый подшутил над **13** одноклассниками. Докажите, что в этом классе есть такие три ученика, что первый подшутил над вторым, второй — над третьим, а третий над первым.

Решение. Выберем ученика, над которым подшутило не менее **13** человек, пусть это будет Вася. Такой ученик найдется, ведь если его нет, то всего было не более **25**·**12** шуток, а по условию их **25**·**13**.

Теперь рассмотрим любого ученика, над которым подшутил Вася, пусть это будет Петя. Исключая Васю и Петю, в классе **23** человека, из которых не менее двенадцати подшутили над Васей (тринадцатым мог быть Петя) и не менее, чем над двенадцатью подшутил Петя (тринадцатым мог быть Вася). Следовательно найдется ученик который подшутил над Васей и над которым подшутил Петя. Ясно что, этот ученик, Вася и Петя образуют искомую тройку.

Примерные критерии проверки:

— полное обоснованное решение: **9** баллов;

— доказано только, что найдется ученик над которым подшутило не менее **13** человек: **3** балла.