

**11.1.** Последовательность чисел  $a_n, n=1,2,\dots,12$  такова, что,  $a_1=1, a_{12}=2$ .  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$  для всех натуральных  $n=1,2,\dots,11$ . Найти  $a_4$ .

**11.2.** Найти все натуральные числа  $n$ , которые можно представить в виде суммы  $n = x + y + (x, y) + [x, y]$  для некоторых натуральных чисел  $x$  и  $y$ . Здесь  $(x, y)$  и  $[x, y]$  обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$  соответственно.

**11.3.** Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

**11.4.** В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O – точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник ОКМЕ – вписанный.

**11.5.** Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$x^2 + x - 1 = y, \quad y^2 + y - 1 = z, \quad z^2 + z - 1 = x.$$

**11.1.** Последовательность чисел  $a_n, n=1,2,\dots,12$  такова, что,  $a_1=1, a_{12}=2$ .  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$  для всех натуральных  $n=1,2,\dots,11$ . Найти  $a_4$ .

**11.2.** Найти все натуральные числа  $n$ , которые можно представить в виде суммы  $n = x + y + (x, y) + [x, y]$  для некоторых натуральных чисел  $x$  и  $y$ . Здесь  $(x, y)$  и  $[x, y]$  обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$  соответственно.

**11.3.** Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

**11.4.** В прямоугольном треугольнике ABC точка M – середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении AP:PB=AT:TC=1:2. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E – точку пересечения отрезков CP и MT, и за O – точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник ОКМЕ – вписанный.

**11.5.** Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$x^2 + x - 1 = y, \quad y^2 + y - 1 = z, \quad z^2 + z - 1 = x.$$