

# Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап

2018-2019 г.г.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Параболы  $P$  и  $S$  являются графиками функций  $y=kx^2$  и  $y=kx^2+b, b>0$  соответственно. Доказать, что любая хорда параболы  $P$ , касающаяся параболы  $S$ , делится этой точкой касания на два равных отрезка.

11.2. Найти количество пятизначных чисел, у которых в записи содержатся две цифры, одна из которых делится нацело на другую.

11.3. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны соответственно точки  $M$  и  $P$  такие, что отрезок  $PM$  параллелен стороне  $BC$ . Из точки  $M$  восстановлен перпендикуляр к прямой  $AB$ , а из  $P$  восстановлен перпендикуляр к  $AC$ , их точку пересечения обозначена за  $T$ . Доказать, что точки  $A, T$  и  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$  – лежат на одной прямой.

11.4. Пусть  $a, b, c$  произвольные числа из интервала  $(0,1)$ . Доказать, что одно из трёх произведений  $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$  всегда не больше  $1/4$ .

11.5. Найти все пары натуральных чисел  $a$  и  $b$  такие, что оба числа  $\frac{a^2+b}{b^2-a}$  и  $\frac{b^2+a}{a^2-b}$  являются целыми.